УДК 517.977:519.46

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ К ЗАДАЧАМ УПРАВЛЕНИЯ В СЛОЖНЫХ СИСТЕМАХ

Е.В. Никульчев
Московская государственная академия приборостроения и информатики

В работе рассмотрены математические методы и модели обеспечения качества управления нелинейными динамическими объектами с учетом заданных функционалов качества ограничений. Разработанный математический аппарат основан на методах теории конечных групп и алгебр Ли.

1 Введение

В современных системах управления предъявляются высокие требования по обеспечению качества, надежности, безопасности. Обеспечение этих требований, в частности, может быть достигнуто, при использовании математических моделей процессов управления в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений; выдвижением нескольких целей и критериев качества управления; учетом разнообразного рода ограничений; рассмотрением движения системы на открытом множестве n-мерного пространства, не обладающего структурой векторного поля.

Один из способов разработки единой методики описания современных сложных систем управления является применение дифференциально-геометрического подхода к построению математических моделей, то есть заменой пространства состояний на дифференцируемое многообразие [9]. Неоспоримым достоинством этой замены является возможность использования единых методик для анализа и синтеза управления в системах различного рода: линейных, нелинейных, пространственно - распределенных [3,4].

Работа посвящена построению математического аппарата и алгоритмического обеспечения анализа и синтеза систем автоматического управления сложными динамическими объектами, на основе применения аппарата конечных групп и алгебр Ли. При этом в качестве объекта управления выступают нелинейные процессы с учетом заданных ограничений и нескольких целевых функционалов. На основе построения групп симметрий Ли, теоремы Нётер и инфинитезимальных критериев инвариантности уравнений Эйлера-Лагранжа, разработана методика построения компромиссной зависимости в задаче синтеза управления с учетом заданных ограничений и критериев качества. Обсуждаются вопросы применимости методики и опыта реализации в технических системах. Делаются обоснованные выводы.

2 Постановка задачи

Рассматривается нелинейная динамическая система управления, математическая модель, которой описывается в виде:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \tag{1}$$

$$y(t) = g(x), \tag{2}$$

где $u = (u^1, ..., u^p) \in \Omega \subset \mathbb{R}^p$ — вектор управляющих воздействий, определенный на открытом множестве евклидова пространства; $x = (x^1, ..., x^q) \in \mathcal{X} = \mathcal{M}^q$ — вектор состояний динамической системы на гладком многообразии; $y = (y^1, ..., y^m) \in \mathbb{R}^m$ — вектор выходных (наблюдаемых) параметров; f, g – функции класса гладкости C^∞.

В системе заданы несколько функционалов, определяющих качество управления

$$\mathcal{J}_k = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(dx/dt, x, u)dt \to \mathrm{extr}, (i = \overline{1, k}), \tag{3}$$

в классе решений $x = f(u)$, определенных при наличии ограничений на управление $u \in \Omega$.

Задача состоит в разработке методов, позволяющих исследовать и проектировать системы управления (1-2) с учетом ограничений и нескольких критериев качества (3).

3 Методы и алгоритмы

В настоящее время существуют методы, позволяющие разработать алгоритмы исследования управляемости и наблюдаемости нелинейных динамических моделей [3].

Динамическая система управляема в точке x^0, если выполняется ранговое условие управляемости в этой точке

$$\dim I(D)(x^0) = \dim \Delta_q(x^0) = q.$$

Здесь $I(D)$ - наименьшая алгебра Ли, содержащая множество управляющих полей D; Δ_q - q-мерная дифференциальная система на многообразии $\mathcal{M}^q$, такая, что $\Delta_q = \mathcal{T}_q(x) \subseteq \mathcal{TM}_q^x$, где $\mathcal{T}_q(x)$ - подпространство касательного пространства $\mathcal{TM}_q^x \forall x \in \mathcal{M}^q$. Для вычисления используется алгоритм, основанный на введении оператора

$$X = \sum_{i=1}^{q} f^i(x,u) \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{4}$$

который рассматривается как семейство, параметризованное управлением $\overline{u}$. Придавая управлению различные допустимые значения $\overline{u} \in \Omega$, получаются операторы семейства (4). Выделив в этом семействе базис, получим системы линейно независимых операторов

$$X_j = \sum_{i=1}^{q} \phi^{i,j}(x) \frac{\partial}{\partial x^i}, (j = \overline{1,n}),$$

где $\phi^{i,j}(x) = f^i(x,\overline{u})$. Полная система операторов (3.1) для регулярной системы формирует конечномерную алгебру Ли, и более того, базис остается одним и тем же для всех $x \in \mathcal{M}^q$, следовательно, полная система операторов для регулярной системы формирует иволютивное распределение $\Delta_n (n \leq q)$. Таким образом, если $n = q$, то система является управляемой.

Система (1) является наблюдаемой в точке x^0, если класс эквивалентности состоит из одной точки x^0. Известен алгебраический критерий наблюдаемости, заключающийся в том, что размерность пространства дифференциальных 1-форм должна совпадать с размерностью многообразия $\mathcal{M}^q$.

В основе методики синтеза управления лежит анализ критериев инвариантность вариационных симметрий лагранжианов $L=(L_1,...,L_k)$ относительно групп симметрий системы (1) в виде

$$L\mathbf{Div}\xi=0, \tag{5}$$

для всех (x,u), и каждой инфинитезимальной образующей

$$\mathbf{v}=\sum_{i=1}^{q}\xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial u^i}+\sum_{\alpha=1}^{p}\varphi^\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \tag{6}$$

группы Ли G. В (5) $\mathbf{Div}\xi$ обозначает полную дивергенцию поля $\xi=(\xi^1,...,\xi^q)$.

Группы симметрий функционалов вида (3) определяются следующим образом [7]. Рассматриваемые группы будут локальными группами преобразований G, действующие на открытом многообразии $\mathcal{M}_1\subset\Omega_0\times\mathcal{X}$. Если $x=f(u)$ - гладкая вещественная функция, определенная на подходящей малой подобласти $\Omega_0\subset\Omega$, такая, что ее график лежит в $\mathcal{M}_1$, то всякое преобразование g из группы G, достаточное близкое к $\mathbf{1}$, будет преобразовывать функцию f в другую гладкую функцию $\widetilde{x}=\widetilde{f}(\widetilde{u})=g\cdot f(\widetilde{u})$, определенную на $\widetilde{\Omega}\subset\Omega_0$.

Локальная группа преобразований G, действующая на $\mathcal{M}_1$, является группой вариационных симметрий функционала (3), если, каково бы ни были подобласть Ω, такая, что ее замыкание $\overline{\Omega}$ лежит в Ω_0, гладкая функция $x=f(u)$, определенная на Ω, график которой лежит в M, и элемент $g\in G$, такой, что $\widetilde{x}=\widetilde{f}(\widetilde{u})=g\cdot f(\widetilde{u})$ - однозначная функция, определенная на $\widetilde{\Omega}$, выполняется равенство

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}Ldt=\int\limits_{t_0}^{t_1}\widetilde{L}dt,$$

Если $\widetilde{x}=\Phi(u),\widetilde{u}=\Xi(u)$ – произвольная замена переменных, то имеется индуцированная замена переменных $\widetilde{x}^{(n)}=\Phi^{(n)}(u,t)$ для производной, заданной продолжением. Таким образом, для заданной функции $x=f(u)$ определяется преобразование функции $\widetilde{x}=\widetilde{f}(u)$. При этом любой функционал

$$\mathcal{J} = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(f(x,u),x,u)dt$$

переводится в

$$\mathcal{J} = \int\limits_{t_0}^{t_1} \widetilde{L}(\widetilde{f}(x,u),\widetilde{x},\widetilde{u})dt.$$

При этом допустимые управления $\Omega = \{u\}$. переводятся в $\widetilde{\Omega} = \{\widetilde{u}\}$.

Формула для нового ланграНжиана

$$L(f(x,u),x,u) = \widetilde{L}(\widetilde{f}(x,u),\widetilde{x},\widetilde{u})\mathrm{det}J(\widetilde{f}(x,u),\widetilde{x},\widetilde{u}), \tag{7}$$

здесь J - матрица Якоби

$$J^{ij}(f(x,u),x,u) = D_j\Xi^i(dx/dt,x,u),$$

$$i,j = \overline{1,p}$$

при этом считается, то $\mathrm{det}J > 0$.

Здесь D - полная производная.

Для данной функции F i-я полная производная, в наших обозначениях, имеет общий вид

$$D_iF = \frac{\partial F}{\partial u^i} + \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_J x^\alpha_{J,i}\frac{\partial F}{\partial x^\alpha_J}, \tag{8}$$

где $J = (j_1,...,j_k)$ и

$$x^\alpha_{J,i} = \frac{\partial x^\alpha_J}{\partial u^i} = \frac{\partial^{k+2}x^\alpha}{\partial u^i \partial u^{j_1}...\partial u^{j_k}},$$

индексы при j,x обозначают частные производные.

В формуле (8) суммирование производится по всем J порядка $0 \leq \sharp J \leq n$, где n - наибольший порядок производной, входящей в F.

Возможно определить эффективную вычислительную процедуру, позволяющую отыскать наиболее общую связную группу симметрий почти всякой системы, описываемой дифференциальными уравнениями общего вида [7]. В этой процедуре коэффициенты $\xi(x,u)$, $\phi(x,u)$ инфинитезимальной образующей (6) гипотетической однопараметрической группы симметрий системы считаются неизвестными функциями от x и u.

Коэффициентами продолженной инфинитезимальной образующей будут некоторые явные выражения, содержащие частные производные коэффициентов ξ и ϕ по x и u. Инфинитезимальный критерий инвариантности будет, таким образом, содержать x, и u производные от x по u, а также $\xi(x,u)$, $\phi(x,u)$ и их частные производные по и u. После исключения всех зависимостей между производными от u, вытекающих из самой системы (поскольку инфинитезимальный инвариант должен выполняться лишь на решениях системы), можно приравнять нулю коэффициенты при оставшихся частных производных от u. Это приведет к большому числу элементарных уравнений с частными производными для определения функций $\xi(x,u)$, $\phi(x,u)$, являющихся коэффициентами инфинитезимальной образующей. Эти уравнения называют определяющими уравнениями группы симметрий данной системы.

В большинстве технических примеров такие определяющие уравнения можно решить элементарными методами, а общее решение будет определять наиболее общую инфинитезимальную симметрию системы. Полученная система инфинитезимальных образующих составляет алгебру Ли симметрий; сама общая группа симметрий может быть получена из данных векторных полей с помощью экспоненты.

Если G - группа вариационных симметрий функционала (3), то она является группой симметрий уравнений Эйлера-Лагранжа

$$\mathbf{E}(L) = 0. \tag{9}$$

Если $L(dx/dt, x, u)$ и $\widetilde{L}(d\widetilde{x}/dt, \widetilde{x}, \widetilde{u})$ - два лагранжиана, связанные (7), то

$$\mathbf{E}_{u^\alpha}(L) = \sum_{\beta=1}^{q} F_{\alpha\beta}(x^1, u)\mathbf{E}_{\widetilde{u}^\alpha}(\widetilde{L}),$$

где $F_{\alpha\beta}$ - определитель матрицы $(q+1)\times(q+1)$

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} D_1\Xi^1 & \dots & D_q\Xi^1 & \frac{\partial \Xi^1}{\partial x^\alpha} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ D_1\Xi^p & \dots & D_q\Xi^p & \frac{\partial \Xi^p}{\partial x^\alpha} \\ D_1\Phi^\beta & \dots & D_q\Phi^\beta & \frac{\partial \Phi^\beta}{\partial x^\alpha} \end{pmatrix}.$$

На основании теоремы Нётер [1, 2], и того факта, что переменные в функционалах связаны одной системой дифференциальных уравнений, показывается, что уравнения Эйлера-Лагранжа каждого целевого функционала определяют общий комплекс уравнений некоторой вариационной задачи. Инвариантность этого комплекса относительно групп вариационных симметрий представляет собой компромиссную зависимость, которая может быть представлена как закон сохранения в характеристической форме для уравнения Эйлера-Лагранжа [4].

Вообще говоря, если $\mathbf{v}$ - инфинитезимальная дивергентная симметрия вариационной задачи, то она порождает группу симметрий соответствующих уравнений Эйлера-Лагранжа. Иными словами, имеется набор из q функций $P(dx/dt, x, u) = (P_1, ..., P_q)$, такой, что

$$\mathbf{Div} P(dx/dt, x, u) = Q \cdot \mathbf{E}(L) = \sum_{v=1}^{p} Q_v \mathbf{E}_v(L) \tag{10}$$

– закон сохранения в характеристической форме для уравнения Эйлера-Лагранжа (9) $\mathbf{E}(L) = 0$, где

$$Q_\alpha = \phi_\alpha - \sum_{i=1}^{q} \xi^i x_i^\alpha$$

- характеристика поля (6),

$$x_i^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}.$$

Каждая инфинитезимальная дивергентная симметрия вариационной задачи порождает однопараметрическую группу $g_e = \exp(\varepsilon \mathbf{v})$ преобразований многообразия $\mathcal{M}_1$.

Например, инвариантность лагранжиана относительно евклидовой группы сдвигов

$$E(q) : x \to Rx + a, \in \mathbb{R}^q, R \in SO(q),$$

действующей на фазовых переменных дает соотношение:

$$\sum_{i=1}^{q} D_i \left(\frac{\partial L}{\partial x_\alpha^i} \right) = 0, (\alpha = \overline{1,p}).$$

Инвариантность относительно вращений

$$L(u, R\nabla x) = L(u, \nabla x), R \in SO(q)$$

приводит к выражению

$$\sum_{i=1}^{q} D_i \left(u^\alpha \frac{\partial L}{\partial x_\beta^i} - u^\beta \frac{\partial L}{\partial x_\alpha^i} \right) = 0, (\alpha, \beta = \overline{1,p})$$

Для задач исследования динамических систем одна из независимых переменных выделяется как время t. В этом случае закон сохранения принимает вид

$$D_t T + \mathbf{Div}\Omega = 0,$$

где $\mathbf{Div}$ - пространственная дивергенция от Ω по $u^1, \ldots, u^q$. Плотность закона сохранения T и соответствующий поток $U = (U^1, ..., U^p)$ являются функциями от x, t, u и производными от x по u и t.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^q$ - область в пространстве U и $x = f(u,t)$ - решение, определенное на $\mathcal{X}$ для всех $u \in \Omega$, а $t_0 \leq t \leq t_1$. Рассмотрим функционал

$$\mathcal{T}[f](t) = \int\limits_{\Omega} T(f(u,t), x, u, t) du$$

который при фиксированных f и Ω зависит только от t. Основное свойство плотности закона сохранения T означает, что $\mathcal{T}_\Omega[f](t)$ зависит только от значений f на границе области $\partial\Omega$.

Вообще говоря, последний функционал удовлетворяет условию

$$\mathcal{T}[f]_\Omega(t_0) - \mathcal{T}_\Omega[f](t_0) = -\int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{\Omega} U(f(u,t), x, u, \tau) dS d\tau \qquad (11)$$

Обратно, если (11) выполняется для всех областей u решений $x = f(u)$, то T, U определяют закон сохранения.

Закон сохранения может быть тривиальным по двум причинам. Тривиальность первого рода состоит в том, что сам набор из p функций P в (10) обращается в нуль на всех решениях данной системы. Тривиальность этого типа обычно легко устранить, если разрешить систему относительно некоторых переменных x^{α}_{J}, выразив их через остальные переменные, и подставить соответствующие выражения вместо этих выделенных переменных. Всякий динамический закон можно сохранения эквивалентен, с точность до прибавления тривиального закона сохранения первого типа, закону сохранения, в котором плотность T зависит только от x, u, t и производных от x.

Второй возможный вариант тривиальности возникает, когда условие на дивергенцию

$$\mathbf{Div} P = 0,$$

справедливо для всех функций $x = f(u)$, независимо от того, является ли они решениями данной системы дифференциальных уравнений.

Всякий набор из p функций $P(dx/dt, x, u)$, дивергенции которого обращаются в нуль тождественно, называется нулевой дивергенцией [7].

Аналогично лемме Пуанкаре, характеризующей ядро обычного оператора дивергенции, имеется характеристика всех нулевых дивергенций – тривиальных законов сохранения второго типа. Пусть $P = (P_1, ..., P_q)$ - набор из p гладких функций, зависящих от $x = (x_1, ..., x_p)$, $u = (u_1, ..., u_q), t$ и производных от x определенных на всем пространстве струй $X^{(n)} \times U \times T$. Тогда P является нулевой дивергенцией $\mathbf{Div} P = 0$, тогда, и только тогда, когда существуют гладкие функции $Q_{j,k}, j, k = \overline{1, p}$ зависящие от x, u, t и производных от x, такие, что

$$Q_{j,k} = -Q_{k,j}, j, k = \overline{1, p},$$

и

$$P_j = \sum_{k=1}^{q} D_k Q_{j,k}$$

для всех $(f(x, u), x, u)$.

Любой тривиальный закон сохранения будет по определению линейной комбинацией тривиальных законов сохранения двух, рассмотренных выше типов.

Таким образом, возможно определить вычислительную схему синтеза управления нелинейными динамическими объектами:

1. Определение управляемости динамической системы.

2. Определение наблюдаемости динамической системы.

3. Вычисление групп вариационных симметрий функционалов, определяющих качество управления.

4. Определение по теореме Нётер закона, выявляющего копмпромиссную зависимость в множестве допустимых управлений.

5. Выбор управления осуществляется из полученного в соответствии с п.4. выражением.

4 Реализация

Для проверки состоятельности и эффективности разработанной методики моделирования систем произведено сравнение с известными численными методами построения компромиссных зависимостей для ряда динамических систем.

Разработанные методики применены для синтеза управления системы теплообмена [5], в задаче стабилизации линейной динамической системы [4], для модели манипулятора с тремя степенями свободы [4].

Экспериментально установлено, что методы построения компромиссов, как законов сохранения, успешно работают для синтеза управления в системах с обратной связью. Реализована система стабилизации с двумя функционалами качества. Рассматриваемый объект описывается системой из двух дифференциальных уравнений. Результаты получаемых решений согласуются с решениями, получаемые при помощи известных методов.

Разработаны алгоритмы, используя методологии дифференциальной геометрии: исследование наблюдаемости и управляемости нелинейных динамических систем и аналитического конструирования систем автоматического регулирования. При этом для синтеза регулятора рассматривается движение системы не из определенного фиксированного состояния, а сразу из всех возможных состояний, принадлежавшей некоторой области, т.е. изучаются не отдельные траектории, а переходные отображения системы, заданные фиксированным управлением.

Разработана технология идентификация параметров линеаризованного уравнения в пространстве состояний для динамической системы [6].

На основе приведенных алгоритмов создается специализованный пакет прикладных программ для функционирования в системе Matlab 6.1, реализующего решение задач анализа и синтеза систем управления на основе дифференциально - геометрического подхода. Особенностью программной реализации является применения операций символьного программирования и численных методов, что дает возможность избежать накопления ошибки при численном дифференцировании.

5 Результаты

Получены следующие основные результаты:

1. Построены математические модели систем управления на основе дифференциально-геометрического описания и методов конечных групп и алгебр Ли; разработаны алгоритмы проектирования и исследования нелинейных динамических объектов.

2. Построены математические модели многокритериальных систем на основе использования инфинитезимальных критериев инвариантности уравнений Эйлера-Лагранжа и разработана методика построения математических моделей и обеспечения качества управления в задаче синтеза с учетом заданных целевых функционалов.

3. Разрабатывается специализованный пакет прикладных программ для системы Matlab, являющийся обобщением существующих методик анализа систем на основе апарата конечных групп и алгебр Ли.

ЛИТЕРАТУРА

1. Емельянова И.С. Теорема Нетер в аналитической динамике с конечным числом степеней свободы //Труды VI межд. конф. женщин-математиков.Т.6. Вып.1. — Нижний Новгород: НижГУ, 1999

2. Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. — М.: Факториал, 1999.

3. Краснощеченко В.И. Синтез систем автоматического управления методами дифференциальной геометрии //Методы современной и классической теории автоматического управления. Том 3. — М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000, с. 17-91.

4. Никульчев Е.В. Разработка математических методов и моделей обеспечения качества управления в многокритериальных системах: Автореферат .. канд. техн. наук: 05.13.01. — М.: МГАПИ, 2000.

5. Никульчев Е.В. Группы непрерывных симметрий для расчета параметров тепловых процессов //Материалы IV науч.-техн. конф.: Новые информационные технологии. — М.: МГАПИ, 2001, с. 130-132.

6. Никульчев Е.В. Технология автоматизированного расчета параметров регулирования технологическими процессами //Промышленные АСУ и контроллеры , N 11, 2001, с. 23-26.

7. Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. /Пер с агл. — Новокзнецк: НФМИ, 1998

8. Bluman G. W., Kumei S. Symmetries and Differential Equations, Springer Verlag, New York, 1989

9. Grigoriev R.O. Identification and Control of Symmetric System, Phys. Rev. E57, 1550, 1998.