

Децентрализованное субоптимальное управление по быстродействию многосвязными объектами¹

Фуртат И.Б.

Астраханский государственный технический университет, 414025, г. Астрахань, ул. Татищева, 16, Россия (тел. (8-512)-614248, телефакс: (8-512)- 257368, e-mail: cainenash@mail.ru)

В работе рассмотрено децентрализованное робастное субоптимальное управление параметрически и функционально неопределенным многосвязным объектом. Предполагается, что доступны измерению только скалярные выходы локальных подсистем, каждая из которых используется только в своих подсистемах. Цель управления состоит в переводе объекта из начального положения в конечное за минимальное время с заданной точностью.

Ключевые слова: децентрализованное робастное субоптимальное управление.

1. Введение

Проблема управления неопределенными объектами была и остается актуальной проблемой в теории управления. На сегодняшний день имеется большое количество публикаций, в которых предложены различные схемы решения этой задачи [1]. Одним из множества этих направлений является компенсация неконтролируемых возмущений, где в последнее время также предложен целый ряд работ [2-9], решающих различным образом эту проблему. Идея подхода компенсации неизвестных возмущений состоит в создании регулирующего устройства и выбора его параметров таким образом, чтобы уменьшить с достаточной точностью воздействие неконтролируемых возмущений на регулируемую переменную.

Так в [2-5] для компенсации неизвестных возмущений используется метод внутренней модели возмущений и подходы адаптивного и робастного управления. Системы управления, основанные на компенсации оценок возмущений рассмотрены в [6, 7]. В [8] для компенсации неопределенностей предлагалось ввести вспомогательный контур, который позволил выделить, оценить и скомпенсировать данные возмущения. На базе алгоритма [8] в [9] предложена компенсация параметрических, функциональных и структурных неопределенностей. В монографии [10] рассмотрены принципы инвариантного управления неопределенными объектами на базе метода вложения систем. Здесь же рассмотрен способ субоптимального инвариантного управления неопределенными объектами, где цель управления состояла в минимизации интегрального критерия с квадратичной подынтегральной функцией. Для управления неопределенными объектами предлагалось управляющий сигнал представить в виде суммы двух слагаемых: первое слагаемое реализует

оптимальное управление, а второе компенсирует неизвестные возмущения. Идея формирования оптимального управляющего сигнала в [10] и компенсирующего сигнала в [8, 9] позволила в [11] решить задачу субоптимального управления нестационарным параметрически и функционально неопределенным объектом. Цель управления в [11] состояла в разработке непрерывного закона управления, минимизирующего интегральный функционал качества от квадратичной подынтегральной функции при переводе объекта из начального положения в конечное за заданное время.

В статье предложен алгоритм децентрализованного субоптимального управления параметрически и функционально неопределенным многосвязным объектом. Предполагается, что измерению доступны только скалярные выходы локальных подсистем. Разработана схема формирования вспомогательного сигнала, позволяющая оценить возмущения, действующие на объект, и перевести его из начального положения в конечное за минимальное время с заданной точностью. Приводятся результаты численного моделирования, иллюстрирующие работоспособность предлагаемого алгоритма.

2. Постановка задачи

Рассмотрим многосвязный объект управления, динамические процессы в котором описываются уравнением

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= A_i(t)x_i(t) + B_i(t)u_i(t) + D_i(t)f_i(t) + \\ &+ \sum_{j=1, j \neq i}^k S_{ij}(t)x_j(t), \quad y_i(t) = L_i x_i(t), \quad (1) \\ x_i(0) &= x_{0i}, \quad i = \overline{1, k}, \end{aligned}$$

где $x_i(t) \in R^{n_i}$ – вектор состояния i -ой подсистемы, $u_i(t)$, $f_i(t)$ и $y_i(t)$ – скалярные вход, внешнее

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-08-00237-а).

неконтролируемое возмущение и выход соответственно; элементы матриц $A_i(t) \in R^{n_i \times n_i}$, $S_{ij}(t) \in R^{n_i \times n_j}$ и векторов $B_i(t) \in R^{n_i}$, $D_i(t) \in R^{n_i}$ – неизвестные функции, $L_i = [1, 0, \dots, 0] \in R^{1 \times n_i}$; x_{0i} – известные начальные условия, k – количество подсистем.

Предположения.

1. Элементы матриц $A_i(t)$, $B_i(t)$, $D_i(t)$ и $S_{ij}(t)$ неизвестны. Известны: размерности $A_i(t)$, $B_i(t)$, $S_{ij}(t)$, $D_i(t)$ и L_i , причем $\text{rang} B_i(t) = m_i$, $\text{rang} D_i(t) = l_i$, $m_i < n_i$ и $l_i < n_i$; множество Ξ возможных значений элементов матриц $A_i(t)$, $B_i(t)$, $D_i(t)$ и $S_{ij}(t)$; начальные условия $x_i(0) = x_{0i}$; элементы матриц $A_i(t)$, $B_i(t)$, $D_i(t)$ и $S_{ij}(t)$ – ограниченные функции.

2. Выполнены условия структурного согласования:

$$A_i(t) = A_{Ni} + B_{Ni} c_i^T(t), \quad B_i(t) = B_{Ni} + B_{Ni} \tau_i(t),$$

$$D_i(t) = B_{Ni} k_i(t), \quad S_{ij}(t) = B_{Ni} \theta_{ij}^T(t) \quad \text{где } A_{Ni} \in R^{n_i \times n_i},$$

$B_{Ni} \in R^{n_i \times m_i}$ – известные номинальные постоянные матрицы, причем собственные числа A_{Ni} не лежат в правой полуплоскости комплексной плоскости, $c_i(t) \in R^{n_i}$, $\tau_i(t) \in R$, $k_i(t) \in R$ и $\theta_{ij}(t) \in R^{n_i}$ – вектор и функции неизвестных параметров.

3. Объект управления (1) – минимально фазовый и последние элементы матриц $B_i(t)$, B_{Ni} – положительная функция и число.

4. Внешние воздействия $f_i(t)$ – неизвестные ограниченные функции.

5. В системе управления недоступны измерению производные сигналов $y_i(t)$ и $u_i(t)$.

Цель управления состоит в синтезе закона регулирования, обеспечивающего перевод объекта (1) из начального положения $y_i(0)$ в конечное $y_i(t_{fi})$ за минимальное время t_{fi} , то есть необходимо минимизировать функционал качества

$$J_i = \int_0^{t_{fi}} dt \quad (2)$$

с некоторой малой погрешностью.

3. Метод решения

Принимая во внимание условия структурного согласования (предположения 2), перепишем уравнение объекта (1) в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= A_{Ni} x_i(t) + B_{Ni} u_i(t) + B_{Ni} \varphi_i(t), \\ y_i(t) &= L_i x_i(t), \quad x_i(0) = x_{0i}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{где } \varphi_i(t) = c_i^T(t) x_i(t) + \tau_i(t) u_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^k \theta_{ij}^T(t) x_j(t) +$$

$+ k_i(t) f_i(t)$ содержит в себе параметрические и функциональные возмущения объекта (1).

Рассмотрим уравнение (3) не подверженное воздействию неизвестных неопределенностей, то есть когда $\varphi_i(t) \equiv 0$. Тогда получим некоторый номинальный объект

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= A_{Ni} x_i(t) + B_{Ni} u_i(t), \quad y_i(t) = L_i x_i(t), \\ x_i(0) &= x_{0i}. \end{aligned} \quad (4)$$

Если в номинальном объекте (4) доступен измерению вектор состояния, то, согласно, например [12, 13], оптимальный закон управления $u_{0i}(t)$ для перевода объекта из начального положения в конечное за минимальное время можно определить в виде

$$u_{0i}(t) = a_i \text{sign}(\zeta_i(t)) \quad \text{или} \quad u_{0i}(t) = a_i \text{sign}(\sigma_i(x_i(t))). \quad (5)$$

В уравнениях (5): $a_i > 0$; первое выражение задает программное управление, а $\zeta_i(t)$ – функция, определяющая время переключения; второе выражение обеспечивает управление с обратной связью, где $\sigma_i(x_i)$ – функция, задающая линию переключения в фазовой плоскости.

Добавив и вычитая в (4) значение оптимального управления $u_{0i}(t)$ из (5), преобразуем уравнение (4) к виду

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= A_{Ni} x_i(t) + B_{Ni} u_{0i}(t) + B_{Ni} u_i(t) + B_{Ni} \psi_i(t), \\ y_i(t) &= L_i x_i(t), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\psi(t) = \varphi(t) - u_{0i}(t)$.

Очевидно, что оптимальное управление (5) минимизирует функционал качества (2) если в (4) $\varphi_i(t) \equiv 0$. Однако, в объекте (1) в общем случае $\varphi_i(t) \neq 0$, а значит необходимо ввести некоторый сигнал необходимый для компенсации данных неопределенностей. Для этого, как и в работах [8, 9, 11], рассмотрим сначала вспомогательный контур

$$\begin{aligned} \dot{x}_{ai}(t) &= A_{Ni} x_{ai}(t) + B_{Ni} u_{0i}(t) + \beta_i B_{Ni} u_i(t), \\ y_{ai}(t) &= L_i x_{ai}(t), \quad x_{ai}(0) = x_{0i}, \end{aligned} \quad (7)$$

$\beta_i > 0$, и вычитая из (6) уравнение (7), составим функцию рассогласования $\zeta_i(t) = y_i(t) - y_{ai}(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_i(t) &= A_{Ni} \sigma_i(t) + B_{Ni} \phi_i(t), \\ \zeta_i(t) &= L_i \sigma_i(t), \quad \sigma_i(0) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $\sigma_i(t) \in R^{n_i}$ – вектор состояния (8), $\phi_i(t) = (1 - \beta_i) u_i(t) + \psi_i(t)$. Преобразуем (8) к форме вход-выход

$$Q_{Ni}(p) \zeta_i(t) = R_{Ni}(p) \phi_i(t), \quad (9)$$

где $Q_{Ni}(p)$ – линейный стационарный дифференциальный оператор, полученный при переходе от (8) к (9).

Если бы производные сигнала $\zeta_i(t)$ были доступны измерению то, задав сигнал $u_i(t)$ в виде $u_i(t) = -\beta_i^{-1} R_{Ni}^{-1}(p) Q_{Ni}(p) \zeta_i(t) = -\beta_i^{-1} \phi_i(t)$ и разрешив $u_i(t) = -\beta_i^{-1} \phi_i(t)$ относительно $u_i(t)$, учитывая, что $\phi_i(t) = (1 - \beta_i) u_i(t) + \psi_i(t)$, получили бы $u_i(t) = -\psi_i(t)$. Подставив последний результат в (6) получили бы уравнение замкнутой системы

$$\dot{x}_i(t) = A_{Ni} x_i(t) + B_{Ni} u_{0i}(t), \quad y_i(t) = L_i x_i(t). \quad (10)$$

Но по условию задачи (предположение 5) производные сигнала $\zeta_i(t)$ не доступны измерению. Поэтому, для компенсации неопределенностей в (1) определим сигнал $u_i(t)$ в виде

$$u_i(t) = -\beta_i^{-1} R_{Ni}^{-1}(p) Q_{Ni}(p) \bar{\zeta}_i(t) = -\beta_i^{-1} \bar{\phi}_i(t), \quad (11)$$

где $\bar{\phi}_i(t)$ и $\bar{\zeta}_i(t)$ – оценки функций $\phi_i(t)$ и $\zeta_i(t)$ соответственно. Добавим и вычтем идеальное управление $u_i(t) = -\beta_i^{-1} R_{Ni}^{-1}(p) Q_{Ni}(p) \zeta_i(t)$, а также подставим (11) в (6). Тогда получим уравнение замкнутой системы:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= A_{Ni} x_i(t) + B_{Ni} u_{0i}(t) + \beta_i^{-1} B_{Ni} \bar{\Delta}_i(t), \\ y_i(t) &= L_i x_i(t), \end{aligned} \quad (12)$$

$\bar{\Delta}_i(t) = \bar{\zeta}_i(t) - \zeta_i(t)$ – функция ошибки оценки.

Для реализации алгоритма управления (11) введем наблюдатель [14]

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i(t) &= G_{0i} \xi_i(t) + D_{0i} (\bar{\zeta}_i(t) - \zeta_i(t)), \\ \bar{\zeta}_i(t) &= L_i \xi_i(t). \end{aligned} \quad (13)$$

В уравнениях (13): $\xi_i(t) \in R^{n_i}$, $G_{0i} = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_i-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, I_{n_i-1} –

квадратная единичная матрица порядка $n_i - 1$, $D_{0i} = -[d_{1i} \mu^{-1}, d_{2i} \mu^{-2}, \dots, d_{n_i} \mu^{-n_i}]^T$, коэффициенты $d_{1i} \mu^{-1}, d_{2i} \mu^{-2}, \dots, d_{n_i} \mu^{-n_i}$ выбираются из условия гурвицевости матрицы $G_i = G_{0i} - D_i L_i$, $D_i = [d_{1i}, d_{2i}, \dots, d_{n_i}]^T$, $\mu > 0$ – достаточно малая величина.

Для оценки точности наблюдения введем в вектор отклонений $\bar{\eta}_i(t) = \Gamma_i^{-1} (\xi_i(t) - \theta_i(t))$, где $\Gamma_i = \text{diag}\{\mu^{n_i-1}, \mu^{n_i-2}, \dots, \mu, 1\}$, $\theta_i(t) = [\zeta_i(t), \dot{\zeta}_i(t), \dots, \zeta_i^{(n_i)}(t)]^T$. Продифференцировав $\bar{\eta}_i(t)$ по времени с учетом уравнения (13), получим: $\dot{\bar{\eta}}_i(t) = \mu^{-1} G_i \bar{\eta}_i(t) + \bar{b}_i \zeta_i^{(n_i+1)}(t)$, $\bar{\Delta}_i(t) = \mu^{n_i-1} L_i \bar{\eta}_i(t)$. Преобразуем предпоследние уравнения в эквивалентные относительно выхода $\bar{\Delta}_i(t)$

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_i(t) &= \mu^{-1} G_i \eta_i(t) + b_i \dot{\zeta}_i(t), \\ \bar{\Delta}_i(t) &= \mu^{n_i-1} L_i \eta_i(t). \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $\eta_i^l(t) = \bar{\eta}_i^l(t) - \mu^{1+l-n_i} \zeta_i^{(l-1)}(t)$, $l = \overline{2, n_i}$, $\eta_i^k(t)$ и $\bar{\eta}_i^l(t)$ – l -ые компоненты векторов $\eta_i(t)$ и $\bar{\eta}_i(t)$, $\eta_i^1(t) = \bar{\eta}_i^1(t)$, $b_i = [\mu^{2-n_i}, 0, \dots, 0]^T$. Последние два уравнения эквивалентны относительно переменных $\eta_i(t) = \bar{\eta}_i(t)$ т.к. являются различными векторно-матричными формами записи одного уравнения $(p^{n_i} + d_{1i} \mu^{-1} p^{n_i-1} + \dots + d_{n_i} \mu^{-n_i}) \bar{\eta}_i^1(t) = p^{n_i} \zeta_i(t)$.

Принимая во внимание (13) и (14), преобразуем уравнение (12) к виду

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= A_{Ni} x_i(t) + B_{Ni} u_{0i}(t) + \beta_i^{-1} \mu^{n_i-1} \bar{b}_i g_i \Delta_i(t), \\ y_i(t) &= L_i x_i(t), \end{aligned} \quad (15)$$

где $\Delta(t) = [\eta_1^i(t), \dot{\eta}_1^i(t), \dots, (\eta_1^i(t))^{(n_i)}]^T$, g_i – вектор, составленный из коэффициентов полинома $Q_{Ni}(\lambda)$ и записанных в обратном порядке.

Утверждение. Пусть выполнены условия предположений. Тогда существует числа $\beta_i > 0$ и $\mu_0 > 0$ такие, что при $\mu \leq \mu_0$ система управления (7), (11), (13) – (15) диссипативна и минимизируется критерий качества (2) с достаточно малой погрешностью.

Работоспособность предложенной системы управления продемонстрируем на численном примере.

4. Пример

Рассмотрим многосвязный объект управления (1)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1(t) & a_2(t) \end{bmatrix} x_1(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ b_1(t) \end{bmatrix} u_1(t) + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ d_1(t) \end{bmatrix} f_1(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ s_1(t) & s_2(t) \end{bmatrix} x_2(t), \\ y_1(t) &= [1 \ 0] x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_3(t) & a_4(t) \end{bmatrix} x_2(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2(t) \end{bmatrix} u_2(t) + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ d_2(t) \end{bmatrix} f_2(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ s_3(t) & s_4(t) \end{bmatrix} x_1(t), \\ y_2(t) &= [1 \ 0] x_2(t). \end{aligned} \quad (16)$$

Класс неопределенности Ξ задан неравенствами: $|a_j(t)| \leq 10$, $0 < b_i(t) \leq 10$, $|d_i(t)| \leq 10$, $|s_j(t)| \leq 20$, $|f_i(t)| \leq 10$, $j = \overline{1, 4}$, $i = 1, 2$. Предполагаются известными начальные условия $x_i^T(0) = [0 \ 0]$.

Цель управления состоит в переводе объекта (16) из начального положения $y_i(0) = 0$ в конечное $y_i(t_{ff}) = 1$ за минимальное время t_{ff} , $i = 1, 2$.

Выберем $A_{Ni} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ и $B_{Ni} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, и сформируем уравнение номинального объекта управления (4):

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_i(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_i(t), \\ y_{Ni}(t) &= [1 \ 0] x_i(t), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (17)$$

Воспользуемся принципом максимума Понтрягина [12, 13], и рассчитаем программное оптимальное управление $u_{0i}(t)$. Для номинального объекта (17) расчет оптимального управления рассмотрен в [8, пример 10.5], откуда следует, что конечное время $t_{fi} = 2$, а программное управление

$$u_{0i}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ -1, & 1 \leq t \leq 2, \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

Введем вспомогательный контур (7) с начальными условиями $x_{ai}^T(0) = [0 \ 0]$ и $\beta_i = 0,002$. Тогда

$$\begin{aligned} \dot{x}_{ai}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_{ai}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_{0i}(t) + 0,002 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_{ki}(t), \\ y_i(t) &= [1 \ 0] x_i(t), \quad x_{ai}^T(0) = [0 \ 0], \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Для оценки производных сигнала $\zeta_i(t)$ воспользуемся фильтром (13), где $\xi_i(t) \in R^2$, $\bar{D}_i = [d_{1i} \ d_{2i}]^T = [2 \ 1]^T$, $\mu = 0,1$. В результате, наблюдатель определится в виде

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{1i}(t) &= -\zeta_{2i}(t) - 2 \cdot 10(\xi_{1i}(t) - \zeta_i(t)), \\ \dot{\xi}_{2i}(t) &= -10^2(\xi_{2i}(t) - \zeta_i(t)), \quad \xi_i(0) = 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Используя последние уравнения, сигнал компенсации (11) можно записать как

$$u(t) = -500 \cdot [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \dot{\xi}_{2i} & \xi_{2i} & \xi_{1i} \end{bmatrix}^T = -500 \dot{\xi}_{2i}, \quad i = 1, 2.$$

Пусть параметры объекта (16) следующие:

– в первой подсистеме $a_1(t) = 2 + \sin t$,
 $a_2(t) = 3 + 5 \sin 2t$, $s_1(t) = 1 + 2 \sin 3t$, $s_2(t) = 1 + 2 \sin 4t$,
 $b_1(t) = 5 + 2 \sin 5t$, $d_1(t) = 10 \sin t$,
 $f_1(t) = 2 + \sin t + P_1(t)$;

– во второй подсистеме $a_3(t) = 2 + \cos t$,
 $a_4(t) = 3 + 5 \cos 2t$, $s_3(t) = 1 + 2 \cos 3t$,
 $s_4(t) = 1 + 2 \cos 4t$, $d_2(t) = 10 \cos t$, $b_2(t) = 3 + \cos 2t$,
 $f_2(t) = 1 + \sin 1,5t + P_2(t)$;

где $P_1(t)$ и $P_2(t)$ – прямоугольные импульсы с амплитудами 1, периодами 3 и 5 сек, длительностями 1 и 1,5 сек.

На рис. 1 и рис. 2 приведены результаты моделирования по выходам $y_1(t)$ объекта (16) и выходу $y_{N1}(t)$ номинального объекта (17) (рис. 1), и по выходам $y_2(t)$ объекта (16) и $y_{N2}(t)$ номинального объекта (17) (рис. 2).

Численное моделирование показало, что результаты переходных процессов прежде всего зависят от выбора чисел β_i во вспомогательном контуре (7) и законе управления (11), а также числа μ в наблюдателе (13). Причем, чем меньше числа β_i и μ , тем ближе графики $y_i(t)$ и $y_{Ni}(t)$.

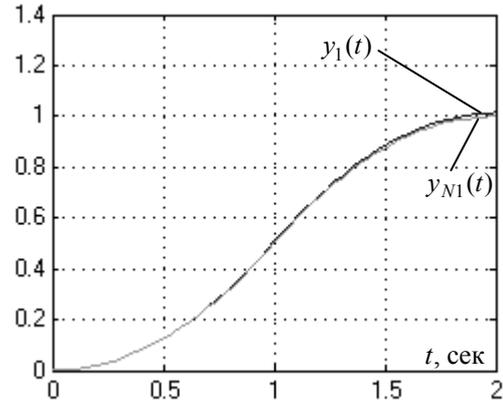


Рис. 1. Переходные процессы по $y_1(t)$ и $y_{N1}(t)$ в первой подсистеме.

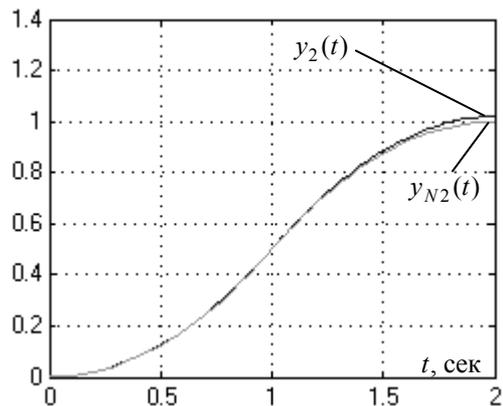


Рис. 2. Переходные процессы по $y_2(t)$ и $y_{N2}(t)$ во второй подсистеме.

Заключение

В статье предложен синтез робастного субоптимального закона управления по быстродействию параметрически и функционально неопределенным линейным многосвязным нестационарным объектом. Предполагалось, что измерению доступны только локальные выходы подсистем объекта, причем их обмен между другими подсистемами запрещен, то есть осуществляется децентрализованное управление. Для решения поставленной задачи достаточно знать множество возможных значений параметров и начальные условия объекта. Для оптимального управления неопределенным объектом, в соответствии с [10], предлагалось закон

регулирования представить в виде суммы оптимального управления номинальным объектом и сигнала компенсации неопределенностей исходного объекта. В свою очередь субоптимальность процесса и выделение неопределенностей объекта осуществлялось с помощью вспомогательных контуров, которые вводились параллельно каждому локальному объекту управления. Численное моделирование подтвердило аналитические результаты и выводы работы.

Список литературы

1. Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. – СПб.: Наука, 2000. - 549 с.
2. Никифоров В.О. Нелинейная система управления с компенсацией внешних детерминированных возмущений // Изв. РАН. Теория и системы управления. - 1997. - № 4. - С. 69-73.
3. Никифоров В.О. Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений. – СПб.: Наука, 2003. - 282 с.
4. Никифоров В.О. Наблюдатели внешних возмущений. 1. Объекты с известными параметрами // Автоматика и телемеханика. - 2004. - № 10. - С. 13-24.
5. Никифоров В.О. Наблюдатели внешних возмущений. 2. Объекты с неизвестными параметрами // Автоматика и телемеханика. - 2004. - № 11. - С. 40-48.
6. Бобцов А.А. Алгоритм робастного управления линейным объектом по выходу с компенсацией неизвестного детерминированного возмущения // Изв. РАН. Теория и системы управления. - 2003. - № 2. - С. 93-97.
7. Бобцов А.А. Алгоритм робастного управления неопределенным объектом без измерения производных регулируемой переменной // Автоматика и телемеханика. - 2003. - № 8. - С. 82-96.
8. Цыкунов А.М. Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений // Автоматика и телемеханика. - 2007. - № 7. - С. 103-115.
9. Фуртат И.Б., Цыкунов А.М. Робастное управление нестационарными нелинейными структурно неопределенными объектами // Проблемы управления. - 2008. - № 5. - С. 2-7.
10. Буков В.Н. Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. – Калуга: Издательство научной литературы Н.Ф. Бочкаревой, 2006. - 720 с.
11. Фуртат И.Б. Робастное субоптимальное управление линейными нестационарными объектами по выходу // Мехатроника, автоматизация, управление. - 2009. - № 7. - С. 7-12.
12. Теория автоматического управления. Часть 2. Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления / под ред. А.А. Воронова. – М.:

Выш. шк., 1986. - 504 с.

13. Методы классической и современной теории автоматического управления. Теория оптимизации автоматического управления / Под ред. Пупкова К.А. и Егупова Н.Д. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, Т. 4, 2004. - 744 с.

14. Atassi A.N., Khalil H.K. A separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Control. - 1999. - Vol. 44. - No. 9. - P. 1672-1687.

15. Брусин В.А. Об одном классе сингулярно возмущенных адаптивных систем. I // Автоматика и телемеханика. - 1995. - № 4. - С. 119-127.

Приложение

Доказательство утверждения. Покажем, что в системе управления (7), (11), (13) – (15) обеспечивается минимизация критерия качества (2) с достаточно малой погрешностью.

Введем новую переменную $\varepsilon_i(t) \in R^{n_i}$, характеризующую степень близости фазовых переменных реального объекта (1) и номинального (4), и равную разности векторов состояния (15) и (4) соответственно, причем на вход номинального объекта (4) подано оптимальное управление $u_{0i}(t)$. В результате получим:

$$\dot{\varepsilon}_i(t) = A_{Ni}\varepsilon_i(t) + \beta_i^{-1}\mu^{n_i-1}\bar{b}_i g_i \Delta_i(t), \quad \varepsilon_i(0) = 0.$$

Преобразуем последнее уравнение и уравнение (14) к виду:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_i(t) &= A_{Ni}\varepsilon_i(t) + \beta_i^{-1}\mu_2^{n_i-1}\bar{b}_i g_i \Delta_i(t), \\ \mu_1 \dot{\eta}_i(t) &= G_i \eta_i(t) + \mu_2 b_i \dot{\zeta}_i(t), \end{aligned} \quad (18)$$

где $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Для дальнейшего доказательства воспользуемся первой леммой [15], согласно которой рассмотрим систему (18) при $\mu_2 = 0$:

$$\dot{\varepsilon}_i(t) = A_{Ni}\varepsilon_i(t), \quad \mu_1 \dot{\eta}_i(t) = G_i \eta_i(t). \quad (19)$$

Т.к. матрицы A_{Ni} (предположение 2) и G_i – гурвицевы, то решение системы (19) устойчиво. Значит, согласно [15], сигналы $\eta_i(t)$, $\varepsilon_i(t)$, $\Delta_i(t)$ и $\dot{\zeta}_i(t)$ ограничены. Доказательство ограниченности остальных функций в каждой подсистеме управления аналогично как в [9]. Следовательно, в соответствии с леммой [15], система (19) диссипативна. Значит

$$\sup_t |\dot{\zeta}_i(t)| < k_1, \quad \sup_t |\Delta_i(t)| < k_2, \quad k_1 < \infty, \quad k_2 < \infty.$$

Однако, диссипативность (19) не гарантирует асимптотическую устойчивость (18) как сингулярно-возмущенной системы. Покажем, что при $\mu_2 > 0$ обеспечивается достаточная малость величины $|\varepsilon_i(t)|$.

Для этого выберем функцию Ляпунова

$$V(t) = \varepsilon_i^T(t) P_i \varepsilon_i(t) + \eta_i^T(t) H_i \eta_i(t), \quad (20)$$

где $P_i = P_i^T > 0$, $H_i = H_i^T > 0$, и вычислим полную производную от нее вдоль траекторий (18)

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & -\varepsilon_i^T(t)Q_{1i}\varepsilon_i(t) + 2\beta_i^{-1}\mu_0^{n_i-1}\varepsilon_i^T(t)P_i\bar{b}_i g_i \Delta_i(t) - \\ & - \mu_0^{-1}\eta_i^T(t)Q_{2i}\eta_i(t) + 2\mu_0\eta_i^T(t)H_i b_i \dot{\zeta}_i(t). \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь $A_{Ni}^T P_i + P_i A_{Ni} = -Q_{1i}$, $G_i^T H_i + H_i G_i = -Q_{2i}$, $Q_{1i} = Q_{1i}^T > 0$, $Q_{2i} = Q_{2i}^T > 0$. Оценим в (21) второе и четвертое слагаемые:

$$\begin{aligned} & 2\beta_i^{-1}\mu_0^{n_i-1}\varepsilon_i^T(t)P_i\bar{b}_i g_i \Delta_i(t) \leq \\ & \leq 2\beta_i^{-1}\mu_0^{n_i-1}\varepsilon_i^T(t)P_i\bar{b}_i g_i (P_i\bar{b}_i g_i)^T \varepsilon_i(t) + \\ & \quad + 2\beta_i^{-1}\mu_0^{n_i-1}|\Delta_i(t)|^2 \leq \\ & \leq 2\beta_i^{-1}\mu_0^{n_i-1}\varepsilon_i^T(t)P_i\bar{b}_i g_i (P_i\bar{b}_i g_i)^T \varepsilon_i(t) + 2\beta_i^{-1}\mu_0^{n_i-1}k_2^2; \\ & 2\mu_0\eta_i^T(t)H_i b_i \dot{\zeta}_i(t) \leq \\ & \leq 2\mu_0\eta_i^T(t)H_i b_i b_i^T H_i \eta_i(t) + 2\mu_0|\dot{\zeta}_i(t)|^2 \leq \\ & \leq 2\mu_0\eta_i^T(t)H_i b_i b_i^T H_i \eta_i(t) + 2\mu_0k_1^2. \end{aligned}$$

Воспользовавшись полученными оценками, перепишем (21):

$$\dot{V}(t) \leq -\varepsilon_i^T(t)Q_{3i}\varepsilon_i(t) - \eta_i^T(t)Q_{4i}\eta_i(t) + \bar{\varphi}_i,$$

где $Q_{3i} = Q_{1i} - 2\beta_i^{-1}\mu_0^{n_i-1}P_i\bar{b}_i g_i (P_i\bar{b}_i g_i)^T$, $Q_{4i} = Q_{2i} - \mu_0^2 H_i b_i b_i^T H_i$, $\bar{\varphi}_i = 2\mu_0(k_1^2 + \beta_i^{-1}\mu_0^{n_i-2}k_2^2)$. Очевидно, что всегда существует числа $\mu_0 > 0$ и $\beta_i > 0$, обеспечивающие $Q_{3i} > 0$ и $Q_{4i} > 0$.

Оценим производную функции Ляпунова в виде

$$\dot{V}(t) \leq -\chi_i V(t) + \bar{\varphi}_i,$$

где $\chi_i = \min\left\{\frac{\lambda_{\min}(Q_{3i})}{\lambda_{\max}(P_i)}, \frac{\lambda_{\min}(Q_{4i})}{\lambda_{\max}(H_i)}\right\}$. Решив последнее неравенство, получим

$$V(t) \leq e^{-\chi_i t} V(0) + \chi_i^{-1} (1 - e^{-\chi_i t}) \bar{\varphi}_i.$$

Тогда, в силу структуры (22)

$$\varepsilon_i(t) \leq e^{-\chi_i t} V(0) + (1 - e^{-\chi_i t}) \chi_i^{-1} \bar{\varphi}_i$$

для $t \in [0; t_f]$. Причем значение правой части последнего неравенства зависит от величин β_i и μ_0 . Очевидно, что уменьшением чисел μ_0 и β_i можно уменьшить значение $|\varepsilon_i(t)|$, а значит уменьшить погрешность, возникающую при переводе объекта (1) из начального положения в конечное за минимальное время. Последнее подтверждено результатами численного моделирования.