Автоматика и телемеханика, № 8, 2011

Обзоры

© 2011 г. **С.Н. ДАШКОВСКИЙ, д-р физ.-мат. наук**
(Университет прикладных наук Эрфурта, Германия),
Д.В. ЕФИМОВ, д-р техн. наук
(Университет Бордо, Франция),
Э.Д. СОНТАГ, д-р физ.-мат. наук
(Университет Рутгерса, США)

УСТОЙЧИВОСТЬ ОТ ВХОДА К СОСТОЯНИЮ И СМЕЖНЫЕ СВОЙСТВА СИСТЕМ[1]

Дан обзор основных результатов в области систем, устойчивых по входу-состоянию, и систем с иными подобными свойствами, предложенными в научных публикациях за последние 20 лет.

1. Введение

Задачи синтеза и анализа нелинейных систем управления находятся в центре внимания научной общественности уже несколько десятилетий, однако только в последние две декады наметился существенный сдвиг в разработке и применении различных методов теории нелинейного регулирования. С одной стороны, подобный успех несомненно связан с развитием вычислительной техники, позволяющей быстро и полно исследовать нелинейные процессы, и с возросшими требованиями к качеству регулирования, удовлетворение которых требует рассмотрения более сложных нелинейных моделей объектов управления и более сложных алгоритмов управления. С другой стороны, это связано с разработкой адекватного теоретического аппарата синтеза и анализа нелинейных систем. 90-е гг. XX в. отмечены предложением и развитием целой серии методов нелинейного управления, названных "конструктивными" в [1]. К числу таких "открытий" этого периода можно отнести и рассматриваемую в данном обзоре концепцию устойчивости динамических систем от входа к вектору состояния [2, 3]. Важность этой концепции состоит в том, что ее применение позволяет формализовать условия устойчивости нелинейной системы в присутствии входных возмущений, или, другими словами, определить понятие "грубости" системы по отношению к внешним возмущениям.

Данная работа посвящена обзору основных результатов, связанных с этой концепцией, и смежным понятиям устойчивости. В разделе 2 вводится базовое свойство робастной устойчивости. В разделах 3 и 4 введены различные смежные свойства, применение которых рассматривается в разделе 5. Вспомогательный материал и все используемые в обзоре сокращения представлены в разделе 6. Результаты, не вошедшие в данный обзор, собраны в разделе 7.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Deutsche Forschungsgemeinschaft (грант № SFB 637).

2. Концепция робастной устойчивости

Известно, что для линейной стационарной системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{2.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ – векторы состояния и входа, гурвицевость матрицы A (все собственные числа матрицы имеют отрицательную вещественную часть) означает глобальную асимптотическую устойчивость при $u = 0$. Для произвольного (измеримого) входа u и начальных условий $x_0 \in \mathbb{R}^n$ решение системы записывается в виде

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int\limits_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau, \quad t \geqslant 0.$$

В этом случае существуют константы $a > 0$, $b > 0$ такие, что $|e^{At}| \leqslant ae^{-bt}$, $t \geqslant 0$, и решения системы удовлетворяют оценке сверху

$$|x(t)| \leqslant ae^{-bt}|x_0| + a\int\limits_0^t e^{-b(t-\tau)}|B||u(\tau)|\,d\tau \leqslant ae^{-b\,t}|x_0| + c\sup_{t\geqslant 0}|u(t)|, \tag{2.2}$$

где $c = a|B|/b$. Из последней оценки для любого $|u(t)| \to 0$ при $t \to \infty$ необходимо следует $|x(t)| \to 0$ при $t \to \infty$, а ограниченность входа u означает ограниченность вектора состояния $x(t)$. Полученная оценка совпадает с формулировкой устойчивости оператора вход-выход линейной системы из пространства L_∞ в L_∞ [4], другие схожие с “L_∞ в L_∞” критерии устойчивости в терминах вход-выходных операторов формулируются следующим образом:

$$\text{“}L_2 \text{ в } L_\infty\text{”}: \quad |x(t)| \leqslant a\,e^{-b\,t}|x_0| + c\int\limits_0^t |\,u(\tau)|\,d\tau,$$

$$\text{“}L_2 \text{ в } L_2\text{”}: \quad \int\limits_0^t |\,x(\tau)|\,d\tau \leqslant a|x_0| + c\int\limits_0^t |\,u(\tau)|\,d\tau,$$

первое свойство определяет в этом случае существование вход-выходного оператора с конечной H_2 нормой, а второе задает существование оператора с конечной H_∞ нормой (предполагается, что входной сигнал ограничен). Для линейной системы существование одной из этих оценок эквивалентно выполнению и всех остальных, т.е. линейная система, если она асимптотически устойчива при нулевом входе, имеет ограниченные решения при любом ограниченном входе. Интуитивное распространение этого свойства и на класс нелинейных стационарных систем оказывается неверным. Для иллюстрации этого факта рассмотрим пример [5]:

$$\dot{x} = -3\,x + (1 + 2\,x^2)\,u.$$

Эта система является глобально асимптотически устойчивой при нулевом входе, однако для начальных условий $x_0 = 2$ и $u(t) = 1$ соответствующее решение $x(t) = (3 - e^t)/(3 - 2\,e^t)$ уходит на бесконечность за конечное время! Более того, другой пример: система

$$\dot{x} = -x + x\,u$$

для любого постоянного входа $u(t) \geqslant 2$ является неустойчивой, но можно показать [6], что для асимптотически затухающего входа ее решения определены для всех $t \geqslant 0$ и асимптотически стремятся к нулю (для этого достаточно рассмотреть функцию Ляпунова $V(x) = \frac{1}{2}\,x^2$), т.е. эта система является устойчивой в смысле "L_2 в L_∞" , но не наделена устойчивостью "L_∞ в L_∞". Таким образом, для нелинейных систем свойство глобальной устойчивости по отношению к внешним ограниченным и/или затухающим возмущениям, оказывается, не следует из глобальной (экспоненциальной) устойчивости в отсутствии входов. Ответ на вопрос, когда нелинейная система наделена свойством робастности по отношению к внешним возмущениям, и предлагает теория устойчивых по входу-состоянию систем, основные положения которой представлены ниже.

2.1. Постановка задачи

Будем рассматривать нелинейные динамические системы, модель которых может быть представлена в виде

$$\dot{x} = f(x,u) \tag{2.3}$$

или

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u, \tag{2.4}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния систем (2.3), (2.4), $u \in \mathbb{R}^m$ – вектор входа. В некоторых случаях будем рассматривать такие системы с выходом $y = h(x)$, где $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ в (2.3) и соответственно функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ в (2.4) являются непрерывными и локально липшицевыми (непрерывно дифференцируемыми), $f(0,0) = 0$ и соответственно $f(0) = 0$. Будем считать, что управление или вход систем (2.3), (2.4) является измеримой локально ограниченной почти везде функцией $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m$ (подробное определение свойства измеримости функции см., например в [7]). Множество всех таких функций, удовлетворяющих условию

$$||u|| = \text{ess. sup}\{|u\,(t)|\,,\ \ t \geqslant 0\,\} < +\,\infty,$$

обозначим $M_{\mathbb{R}^m}$ (основные определения и обозначения, принятые в статье, и ряд базовых свойств систем (2.3), (2.4) собраны в разделе 6). Символ $x(t, x_0, u)$ обозначает траекторию системы (2.3) для $t \geqslant 0$ с начальными условиями $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $u \in M_{\mathbb{R}^m}$ (иногда, если значение аргументов понятно из контекста, будем использовать обозначение $x(t)$ вместо $x(t, x_0, u)$). Требуется предложить определение робастной устойчивости для этих систем по отношению к входам, разработать необходимые и достаточные условия устойчивости, дать характеризацию этого свойства в терминах функций Ляпунова и установить связь между свойствами глобальной асимптотической и робастной устойчивости. Система (2.3) является обобщением (2.4), поэтому ниже все определения рассматриваются для системы (2.3), со специальными ссылками на (2.4) там, где это необходимо. Некоторые обозначения и стандартные определения свойств устойчивости для систем (2.3) и (2.4) приведены в разделе 6.

2.2. Устойчивость от входа к вектору состояния

Более 20 лет назад один из авторов этой работы предложил [8] определение свойства робастной устойчивости для системы (2.3), формулируемое путем обобщения оценок полученных для устойчивых линейных систем (определения функций из классов $\mathcal{KL}$, $\mathcal{K}$, используемые далее, представлены в разделе 6).

Определение 2.1 [8]. *Система* (2.3) *называется устойчивой по входу-состоянию* (*input-to-state stable*), *если для любого входа* $u \in M_{\mathbb{R}^m}$ *и* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *существуют функции* $\beta \in \mathcal{KL}$, $\gamma \in \mathcal{K}$ *такие, что*

$$|\,x(t, x_0, u)| \leqslant \beta(|x_0|, t) + \gamma(||u||) \tag{2.5}$$

для $\forall\, t \geqslant 0$. *Функция* γ *называется нелинейным коэффициентом усиления.*

Примем для этого нового свойства системы (2.3) сокращение УВС. Так как для любых $a, b \in \mathbb{R}_+$ выполнено $\max\{a,\, b\} \leqslant a + b \leqslant 2\, \max\{a,\, b\}$, то существует эквивалентная формулировка свойства УВС:

$$|\,x(t, x_0, u)| \leqslant \max\{\, \beta(|x_0|, t), \gamma(||u||)\,\} \tag{2.6}$$

для всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $u \in M_{\mathbb{R}^m}$ и некоторых $\beta \in \mathcal{KL}$, $\gamma \in \mathcal{K}$. Очевидно, что полученная оценка (2.2) для решений линейной системы (2.1) удовлетворяет определению УВС для $\beta(s, t) = a\, s\, e^{-b\, t}$ и $\gamma(s) = c\, s$. Функции классов $\mathcal{KL}$, $\mathcal{K}$ позволяют сжато и в общем виде записать оценки на решения нелинейных систем, так же как это делается с использованием линейных коэффициентов усиления и экспоненциальных оценок в линейных системах. Заметим, что для приложений имеет смысл находить наиболее точные оценки на решения в определении УВС, для этого в зависимости от системы, может быть удобнее использовать (2.6) вместо (2.5). Существует также более общая форма этого определяющего неравенства [9], которое становится особенно полезным при рассмотрении соединений УВС систем, где на вход одной системы подаются сигналы нескольких систем. Далее рассмотрим развернутое описание свойства УВС и его эквивалентные способы задания, для чего введем ряд сопровождающих свойств динамических систем.

Определение 2.2 [10]. *Система* (2.3)

а) называется 0*-локально устойчивой* (0*-ЛУ*), *если для случая* $u = 0$ *отображение* $x_0 \to x$ *непрерывно в точке* $x_0 = 0$ (*локальная устойчивость по Ляпунову в начале координат*);

б) имеет асимптотический коэффициент усиления, если для всех $u \in M_{\mathbb{R}^m}$ *и* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *существует функция* $\gamma \in \mathcal{K}$ *– нелинейный асимптотический коэффициент системы – такая, что*

$$\varlimsup_{t \to +\infty} |\,x(t, x_0, u)| \leqslant \gamma\,(||u||)\,;$$

в) имеет равномерный асимптотический коэффициент усиления, если верхний предел в предыдущем неравенстве существует равномерно по x_0 *и* u, *т.е. существует функция* $\gamma \in \mathcal{K}$ *такая, что* $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, \kappa > 0$ $\exists\, T(\varepsilon, \kappa) > 0$:

$$|x_0| \leqslant \kappa \quad \Rightarrow \sup_{t \geqslant T(\varepsilon,\kappa)} |\,x(t, x_0, u)| \leqslant \gamma(||u||) + \varepsilon;$$

г) имеет предельное свойство, если для всех $u \in M_{\mathbb{R}^m}$ *и* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *существует функция* $\rho \in \mathcal{K}$ *такая, что*

$$\inf_{t \geqslant 0} |x(t, x_0, u)| \leqslant \rho\,(||u||)\,.$$

Условие *б*) последнего определения можно интерпретировать как “предельную ограниченность”, равномерную по начальным условиям всех решений УВС системы. Это условие также может быть интерпретировано как обобщение условия аттрактивности системы на случай, когда $u \neq 0$. Условие *г*) означает, что для любых начальных условий $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $u \in M_{\mathbb{R}^m}$ соответствующая им траектория системы $x(t, x_0, u)$ входит в окрестность $\rho\,(||u||)$ начала координат, но не обязательно остается там (согласно предельному свойству затем эта траектория может быть и неограниченной).

О п р е д е л е н и е 2.3 [11]. *Система* (2.3) *называется робастно (грубо) устойчивой, если существует функция* $\rho \in \mathcal{K}_\infty$, *такая что для любого допустимого, возможно, нестационарного закона управления обратной связи*

$$u = k(t, x),$$

то из того, что этот закон управления равномерно глобально асимптотически стабилизирует систему (2.3) (*равномерно по* k), *следует выполнение условия*

$$|k(t, x)| \leqslant \rho(|x|) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ и почти всех } t \geqslant 0.$$

Под допустимым законом управления обратной связи понимается закон $k(t, x)$ такой, что для $x(0) \in \mathbb{R}^n$ решение системы

$$\dot{x} = f(x, k(t, x))$$

существует и определено как минимум для малых t, и два таких решения совпадают на их интервале существования. Функция $k(t, x)$ также может представлять и неучтенную динамику или внешнее возмущение $k(t)$. В этом случае функцию ρ называют функцией границы устойчивости (stability margin) и согласно введенному определению, если внешнее возмущение k ограничено по амплитуде функцией границы устойчивости ρ, система сохраняет свойство устойчивости (она асимптотически устойчива, робастно для возмущений, ограниченных ρ). Важность и связь с УВС введенных в определениях 2.2 и 2.3 свойств объясняется в следующей теореме.

Т е о р е м а 2.1 [10, 12]. *Следующие свойства являются эквивалентными для системы* (2.3):

- *УВС;*
- *существование равномерного асимптотического коэффициента усиления;*
- 0-*ЛУ и существование асимптотического коэффициента усиления;*
- 0-*ЛУ и наличие предельного свойства;*
- *робастная устойчивость.*

Таким образом, свойство УВС может быть введено непосредственно через понятия робастной устойчивости или асимптотического коэффициента усиления по входу. Данные эквивалентные определения позволяют лучше понять особенности свойства УВС, скрытые в оценке (2.5) из определения 2.1. Отметим еще одну важную особенность свойства УВС – его инвариантность относительно преобразований координат. Если x – вектор состояния УВС системы, то, вводя в рассмотрение гомеоморфное преобразование к новым координатам $\widehat{x} = S(x)$ (где S непрерывно и существует непрерывное S^{-1}, $S(0) = 0$), получим, что в новых координатах $\widehat{x}$ система будет также УВС с модифицированными функциями β и γ. Подчеркнем, что не всякое свойство устойчивости системы является независимым по отношению к нелинейным преобразованиям координат, например свойство экспоненциальной устойчивости таковым не является [2]! УВС и иные введенные понятия могут быть легко обобщены на другие типы систем, такие как дискретные, гибридные, системы с запаздыванием и более общие классы систем [13–15].

2.3. УВС функции Ляпунова

Аппарат функций Ляпунова [16] традиционно используется для анализа устойчивости автономных систем (для $u = 0$). Рассматриваемое свойство устойчивости предполагает наличие входа у системы. Принципиальным достижением прямого метода Ляпунова является возможность анализировать (асимптотическое) поведение решений системы без вычисления собственно решений как функций времени и начальных условий (что является сложно разрешимой задачей для нелинейных систем). Проверяются неравенства для некоторых функций вектора состояния и их производных, с подстановкой функций правой части системы. Распространение этого подхода на системы с входом было впервые осуществлено в теории диссипативных систем (см. определение 6.3 этого вида устойчивости в разделе 6, [17, 18]), где для оценивания решений систем использовались неравенства, зависящие от входа, выхода и состояния системы, для производных соответствующих положительно определенных функций (функций запаса). Оказывается, подобные неравенства также позволяют определить качественные и количественные характеристики поведения решений возмущенных систем, не вычисляя собственно решения во временной области. Именно в этом смысле понимал и с этой целью вводил свои функции А.М. Ляпунов, в связи с чем рассматриваемый ниже аппарат анализа получил название функций Ляпунова.

Определение 2.4 [8]. *Гладкая функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ называется УВС функцией Ляпунова, если для нее существуют функции $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$, $\alpha_3, \chi \in \mathcal{K}$ такие, что выполнены условия*:

$$\alpha_1(|x|) \leqslant V(x) \leqslant \alpha_2(|x|) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

$$|x| \geqslant \chi(|u|) \;\Rightarrow\; L_{f(x,u)}V(x) \leqslant -\alpha_3(|x|) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\; u \in \mathbb{R}^m. \tag{2.7}$$

Отметим, что коэффициент усиления χ, вообще говоря, отличен от коэффициента усиления γ, введенного в определении УВС. В [19] было введено понятие динамической устойчивости от входа к вектору состояния (ДУВС), которое является эквивалентным свойству УВС, однако при этом оно учитывает эффект затухания влияния более ранних значений входа на текущие значения вектора состояния. Более того, определение ДУВС и соответствующая ДУВС функция Ляпунова вводятся таким образом, что соответствующие коэффициенты усиления совпадают. Эквивалентное определение УВС функции Ляпунова получится, если условие (2.7) заменить на

$$DV(x)f(x,u) \leqslant \theta(|u|) - \alpha(|x|) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\; u \in \mathbb{R}^m, \tag{2.8}$$

где $\alpha, \theta \in \mathcal{K}_\infty$.

Теорема 2.2 [8, 12]. *Система (2.3) является УВС тогда и только тогда, если для нее существует УВС функция Ляпунова.*

Отметим, что для случая $u = 0$ УВС функция Ляпунова редуцируется к стандартной функции Ляпунова для асимптотической устойчивости системы. В [20] показано, что если у системы существует функция Ляпунова, то у нее существует и гладкая “экспоненциальная” функция Ляпунова $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ такая, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ и некоторых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$, $\theta \in \mathcal{K}$ выполнено

$$\alpha_1(|x|) \leqslant V(x) \leqslant \alpha_2(|x|),\; DV(x)\,f(x,u) \leqslant \theta(|u|) - V(x).$$

Важный и полезный механизм работы с УВС функциями Ляпунова, позволяющий модифицировать в нуле или на бесконечности функции $\alpha, \alpha_3, \chi, \theta$, предложен в [21]. По определению диссипативных систем (определение 6.3) и форме УВС функции Ляпунова УВС системы формируют подкласс диссипативных систем (V – функция запаса, $(\theta(|u|) - \alpha(|x|))$ – функция расхода). Рассмотрим простейшие примеры, иллюстрирующие связь метода функций Ляпунова и свойства УВС. Вначале отметим, что линейная система (2.1) является УВС тогда и только тогда, когда матрица A гурвицева, в качестве функции Ляпунова может быть выбрана $V(x) = x^{\mathrm{T}}Px$, где $P = P^{\mathrm{T}} > 0$ – решение соответствующего уравнения Ляпунова $A^{\mathrm{T}}P + PA < 0$. Это следует из рассуждений, приведенных выше для линейных систем. Далее рассмотрим нелинейную систему

$$\dot{x} = -x^3 + u, \quad x, u \in \mathbb{R}.$$

Выбрав $V(x) = \frac{1}{2}x^2,\ \alpha_3(s) = \frac{1}{2}s^4,\ \chi(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}s\right)^{\frac{2}{3}},\ s \geqslant 0$, получим, что

$$\dot{V} = x(-x^3 + u) < -\frac{1}{2}x^4 = -\alpha_3(|x|),$$

если $V(x) > \chi(|u|)$. Это означает, что эта система является УВС, а в качестве ее УВС функции Ляпунова можно взять $V(x) = \frac{1}{2}x^2$.

2.4. УВС стабилизируемость

Приведем результаты, позволяющие наделить заданную систему вида (2.3) свойством УВС. Введем следующее определение.

Определение 2.5 [11]. *Будем называть систему* (2.3) *стабилизируемой, если для нее существует закон управления*

$$u = k(x)$$

(*где k – непрерывная и дифференцируемая функция*) *такой, что замкнутая система управления глобально асимптотически устойчива в начале координат пространства состояний. Далее будем называть систему* (2.3) *УВС стабилизируемой, если для нее существует закон управления*

$$u = k(x) + v$$

(*где v – новый вектор входа*), *обеспечивающий для замкнутой системы свойство УВС по входу v. И наконец, будем называть систему* (2.3) *слабо УВС стабилизируемой, если для нее существует закон управления*

$$u = k(x) + \Omega(x)v$$

(*где матричная функция Ω – непрерывная и дифференцируемая, обратимая для каждого x*) *такой, что замкнутая система является УВС по входу v.*

Очевидно, что УВС стабилизируемая система является слабо УВС стабилизируемой при $\Omega(x) = I$, кроме того, по определению УВС, УВС стабилизируемая система и слабо УВС стабилизируемая системы являются одновременно и стабилизируемыми, так как при $v = 0$ получаем глобально асимптотически устойчивую систему. Более того, справедливы следующие результаты.

Теорема 2.3 [11]. *Если система* (2.3) *является стабилизируемой, то она и слабо УВС стабилизируема.*

Теорема 2.4 [8]. *Если система* (2.4) *является стабилизируемой, то она и УВС стабилизируема.*

В работе [22] также показано, что если система (2.4) является глобально асимптотически управляемой (т.е. для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существует $u \in M_{\mathbb{R}^m}$, $||u|| \leqslant \sigma(|x_0|)$, $\sigma \in \mathcal{K}$, такое, что $|x(t, x_0, u)| \leqslant \beta(|x_0|, t)$, $\beta \in \mathcal{KL}$, $t \geqslant 0$), то существует закон управления обратной связи $u = k(x) + v$, возможно с разрывной функцией k, такой, что замкнутая система является УВС (так как система (2.4) с управлением k в общем случае оказывается разрывной, то в [22] используется особое определение решений такой возмущенной системы). Эти результаты устанавливают условия принципиальной разрешимости задачи УВС стабилизации, не предлагая выбор функций k и Ω. Конкретные способы синтеза робастно стабилизирующих законов управления для различных классов систем будут рассмотрены в разделе 5.

2.5. Связь устойчивости операторов вход-состояние и УВС

Рассмотрим еще ряд свойств УВС системы. Эти свойства основываются на исследовании операторов отображения пространства входов в пространство состояний нелинейной динамической системы, аналогичные рассмотренным для линейной системы во введении.

Определение 2.6 [6]. *Будем говорить, что система* (2.3) *наделена свойством "L^∞ в L^∞", если существуют функции $\alpha, \gamma \in \mathcal{K}_\infty$ и $\beta \in \mathcal{KL}$ такие, что $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\forall\, u \in M_{\mathbb{R}^m}$ выполнено*

$$\alpha(|x(x_0,t,u)|) \leqslant \beta(|x_0|,t) + \sup_{s\in[\,0,t]} \gamma(|u(s)|) \quad \forall\, t \geqslant 0.$$

Определение 2.7 [6]. *Будем говорить, что система* (2.3) *наделена свойством "L^2 в L^∞", если существуют функции $\alpha, \gamma \in \mathcal{K}_\infty$ и $\beta \in \mathcal{KL}$ такие, что для $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\forall\, u \in M_{\mathbb{R}^m}$ выполнено*

$$\alpha(|x(x_0,t,u)|) \leqslant \beta(|x_0|,t) + \int\limits_0^t \gamma(|u(s)|)\, ds \quad \forall\, t \geqslant 0.$$

Определение 2.8 [6]. *Будем говорить, что система* (2.3) *наделена свойством "L^2 в L^2", если существуют функции $\alpha, \gamma, \kappa \in \mathcal{K}_\infty$ такие, что для $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\forall\, u \in M_{\mathbb{R}^m}$ выполнено*

$$\int\limits_0^t \alpha(|x(s)|)\, ds \leqslant \kappa(|x_0|) + \int\limits_0^t \gamma(|u(s)|)\, ds \quad \forall\, t \geqslant 0.$$

Определение 2.6 содержит естественное продолжение на нелинейные системы понятия конечного L_1 оператора от входа к выходу при условиях нелинейной замены координат [6]. Определение 2.7 означает в этом случае существование вход-выходного оператора с конечной H_2 нормой. Третье свойство 2.8 является развитием на нелинейные системы понятия оператора с конечной H_∞ нормой. Имеет место следующая лемма.

Лемма 2.1 [6]. *Система* (2.3) *является УВС тогда и только тогда, когда она наделена одним из свойств, данных в определениях 2.6 и 2.8.*

Подобное заключение устанавливает еще одну параллель между свойствами УВС для нелинейной системы и глобальной асимптотической устойчивостью линейной системы, где также выполнено это соотношение. Свойство, заданное в определении 2.7, является более слабым, чем УВС. Отметим, что подобного типа динамическая система будет наделена свойством продолжимости решений. В [6] это свойство динамической системы (2.3) получило название интегральной устойчивости от входа к вектору состояния (ИУВС). Отметим очевидное соотношение свойств УВС и ИУВС нелинейных динамических систем [6]: если система (2.3) является УВС, то она также и ИУВС. Свойство ИУВС – это первое родственное УВС свойство, приведенное в обзоре, построенное на базе "концепции УВС": т.е. как это будет показано далее, оно имеет схожие способы формулировки, связь с устойчивостью линейных систем, эквивалентное выражение через функцию Ляпунова. Более подробно особенности свойства ИУВС, а также другие дополнительные свойства устойчивости, получаемые в рамках УВС концепции, рассмотрены в разделе 3.

3. Сопутствующие УВС свойства

Рассмотрим свойство ИУВС и другие характеристики динамических систем, сформулированные на базе УВС концепции.

Подчеркнем важную особенность “L^2 в L^∞” устойчивых систем.

Лемма 3.1 [6]. *Если решения системы* (2.3) *удовлетворяют оценке из определения 2.7, то для любого u такого, что*

$$\int\limits_0^\infty \gamma(|u(s)|)\, ds < \infty,$$

и для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$ следует: $x(t, x_0, u) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Приведем далее необходимые и достаточные условия свойства ИУВС динамической системы, для чего введем несколько полезных определений.

Определение 3.1 [23]. *Будем называть непрерывно дифференцируемую функцию $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ ИУВС функцией Ляпунова, если для нее существуют функции α_1, $\alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$, $\sigma \in \mathcal{K}$ и положительно определенная непрерывная функция α_3 такие, что*

$$\alpha_1(|x|) \leqslant V(x) \leqslant \alpha_2(|x|) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

и

$$DV(x)\, f(x,u) \leqslant -\alpha_3(|x|) + \sigma(|u|) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\, u \in \mathbb{R}^m.$$

Подчеркнем основное отличие УВС и ИУВС функций Ляпунова: для УВС системы функция $\alpha_3 \in \mathcal{K}_\infty$. Далее рассмотрим систему (2.3) с выходом:

$$\dot{x} = f(x,u), \quad y = h(x), \tag{3.1}$$

где $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ – непрерывная функция. Для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $u \in M_{\mathbb{R}^m}$ обозначим $y(t, x_0, u) = h(x(t, x_0, u))$ для всех $t \geqslant 0$, где определено решение системы (3.1). В дальнейшем обозначим множество нуль-динамики системы (3.1) $Z = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}$.

Определение 3.2 [23, 24]. *Система* (3.1) *называется детектируемой в нуле по выходу h, если для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ выполняется*

$$y(t, x_0, 0) = 0, \quad t \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to+\infty} |x(t, x_0, 0)| = 0.$$

Система (3.1) *называется h-диссипативной если существует непрерывно дифференцируемая, радиально неограниченная и положительно определенная функция $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, $\sigma \in \mathcal{K}$ и положительно определенная функция α_4 такие, что*

$$DW(x) f(x,u) \leqslant -\alpha_4(|h(x)|) + \sigma(|u|) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m.$$

Если это свойство верно для гладкой функции W, то система (3.1) *называется гладко h-диссипативной.*

Для детектируемой в нуле по выходу h системы, множество Z является инвариантным при $u = 0$ и сформировано решениями системы (3.1) с тождественно равным нулю входом и выходом (решениями системы нуль-динамики), асимптотически стремящимися к положению равновесия в начале координат.

Теорема 3.1 [23, 25]. *Для системы* (2.3) *следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Система является ИУВС;*
2. *У системы существует гладкая ИУВС функция Ляпунова;*

3. *Существует выход h, который делает систему гладко h-диссипативной и детектируемой в нуле;*

4. *Система является глобально асимптотически устойчивой для $u = 0$ и существует гладкая положительно определенная и радиально неограниченная функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ такая, что*

$$DV(x)f(x,u) \leqslant \sigma(|u|)$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ и некоторой $\sigma \in \mathcal{K}$;

5. *Существует гладкая положительно определенная и радиально неограниченная функция $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, функции γ, $\rho \in \mathcal{K}_\infty$ и положительно определенная функция b с $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dr}{1+b(r)} = +\infty$ такие, что для всех $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $u \in \mathbb{R}^m$ выполнено*

$$|x| \geqslant \rho(|u|) \quad \Rightarrow \quad DW(x)f(x,u) < \gamma(|u|)b[W(x)];$$

6. *Существуют функции W, γ, ρ, b, удовлетворяющие условиям п. 5, и положительно определенная функция α такие, что для всех $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $u \in \mathbb{R}^m$ выполнено*

$$|x| \geqslant \rho(|u|) \quad \Rightarrow \quad DW(x)f(x,u) \leqslant -\alpha(|x|) + \gamma(|u)b[W(x)].$$

Таким образом, ИУВС свойство имеет такой же развернутый набор эквивалентных способов задания, что и УВС, отличие состоит только в робастности системы по отношению к различным видам входных воздействий. Общий стиль описания этих свойств позволяет отнести их к единой концепции устойчивости. Отметим, что в [26] доказана эквивалентность свойства ИУВС и ослабленного свойства "L^2 в L^2", когда для всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $u \in M_{\mathbb{R}^m}$ существуют α, γ, $\kappa, \chi \in \mathcal{K}_\infty$ такие, что выполнено

$$\int\limits_0^t \alpha(|x(s)|)\, ds \leqslant \kappa(|x_0|) + \chi\left(\int\limits_0^t \gamma(|u(s)|)\, ds\right) \quad \forall\, t \geqslant 0.$$

Отличие этого свойства от введенного в определении 2.8 состоит в функции χ, появление которой может быть интерпретировано как "L^p в L^q" устойчивость системы при $q \neq p$. В качестве примера ИУВС системы, не являющейся УВС, рассмотрим следующую

$$\dot{x} = -\frac{x}{x^2+1} + u, \quad x, u \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, что эта система не является УВС. Например, при $u \equiv 1$ выполняется $\dot{x} \geqslant \dfrac{1}{2}$ и для любого начального условия решение будет неограниченным. Рассмотрим в качестве кандидата ИУВС функции Ляпунова $V(x) = |x|$. Эта функция дифференцируема на всей числовой оси за исключением начала координат. Продифференцировав эту функцию, в силу уравнений системы получим

$$\dot{V} = -\frac{|x|}{x^2+1} + \operatorname{sign}(x)u \leqslant -\frac{|x|}{x^2+1} + |u|, \quad x \neq 0.$$

Определяя $\alpha_3(|x|) = \dfrac{|x|}{x^2+1}$, $\sigma(|u|) = |u|$, мы видим, что функция V является ИУВС функцией Ляпунова для рассматриваемой системы. Можно показать что система

$$\dot{x} = -x + x\,u,$$

рассмотренная выше, также является ИУВС системой, более того, любая билинейная система

$$\dot{x} = \left(A + \sum_{i=1}^{m} u_i A_i \right) x + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u = (u_1, \ldots, u_m)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m,$$

является ИУВС тогда и только тогда, если матрицы $A, A_1, \ldots, A_m$ гурвицевы [3].

3.2. Локальная устойчивость от входа к вектору состояния

Интересным обобщением свойства УВС является его локальная версия (ЛУВС) [10, 27, 28].

Определение 3.3. *Система* (4.2) *называется локально устойчивой по входу-состоянию* (*ЛУВС*), *если существуют положительные числа ρ^0, ρ^u и функции $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$, $\beta \in \mathcal{KL}$, такие что для всех начальных значений $|x^0| \leqslant \rho^0$ и входов $||u|| \leqslant \rho^u$ выполняется*

$$x(t, x_0, u) < \beta(|x_0|, t) + \gamma(||u||_\infty), \quad t \geqslant 0. \tag{3.2}$$

Очевидно, что при $\rho^0 = \infty$, $\rho^u = \infty$ получаем обычное свойство УВС. Отметим, что множество ЛУВС систем содержит класс ИУВС как подмножество, которое, в свою очередь, содержит множество УВС систем. Функция Ляпунова для ЛУВС систем определяется аналогично случаю УВС, при этом импликация

$$V(x) \geq \gamma(|u|) \Longrightarrow DV(x) \cdot f(x, u) \leq -\alpha(V(x)) \tag{3.3}$$

должна выполняться лишь для $|x| \leqslant \rho^0$ и $|u| \leqslant \rho^u$. Аналогично можно определить локальные версии равномерного асимптотического коэффициента усиления, асимптотической устойчивости и т.д. В качестве примера ЛУВС системы рассмотрим следующую:

$$\dot{x} = -x + x^2 + u, \quad x, u \in \mathbb{R}.$$

Эта система при нулевом входе имеет два положения равновесия, поэтому не является глобально асимптотически устойчивой, а значит, не является УВС. Однако если ввести ограничения на начальные условия и входной сигнал, например потребовав $|x(0)| < \dfrac{1}{2}$ и $|u| < \dfrac{1}{4}$, то нетрудно убедиться, что эта система является ЛУВС, для чего можно выбрать $V(x) = |x|$ в качестве ЛУВС функции Ляпунова.

Далее рассмотрим системы с выходом и соответствующие свойства робастной устойчивости.

3.3. Устойчивость от выхода и входа к вектору состояния

Рассмотрим дуальное УВС свойство относительно вектора выхода для системы

$$\dot{x} = f(x), \quad y = h(x), \tag{3.4}$$

где векторная функция f – локально липшицева и непрерывна; h – непрерывно дифференцируема и $f(0) = 0$. Для линейных систем подобное свойство получило название “обнаруживаемости” или минимально-фазовости.

Определение 3.4 [29]. *Система* (3.4) *называется устойчивой по выходу-состоянию* (*ВСУ*), *если существуют функции $\beta \in \mathcal{KL}$ и $\gamma \in \mathcal{K}$ такие, что для всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и всех $t \in [0, t_{\max})$ выполнено*

$$|x(t, x_0)| \leqslant \beta(|x_0|, t) + \gamma(||y_{[0,t]}||).$$

Здесь $t_{\max} = t_{\max}(x_0) \leqslant +\infty$ задает интервал, на котором априори определено решение системы (3.4), $y(t) = h[x(t, x_0)]$ – функция выхода, $y_{[0,t]}$ – сужение решения $y(t)$ на временной интервал $[0, t]$.

Определение 3.5 [29]. *Функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ называется ВСУ функцией Ляпунова для системы* (3.4), *если:*

1. *Существуют функции $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$ такие, что выполнено*

$$\alpha_1(|x|) \leqslant V(x) \leqslant \alpha_2(|x|) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n;$$

2. *Функция V непрерывно дифференцируема вдоль траекторий системы* (3.4), *при этом существуют функции $\alpha, \sigma \in \mathcal{K}_\infty$:*

$$DV(x)f(x) \leqslant -\alpha(|x|) + \sigma(|y|) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \text{ и } t \in [0, t_{\max}).$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2 [29]. *Система* (3.4) *является ВСУ тогда и только тогда, когда у нее существует ВСУ функция Ляпунова.*

Таким образом, замена входа на выход в оценках из определений 2.1–3.4 приводит к аналогичной модификации функций Ляпунова. Приведем здесь еще один интересный результат.

Лемма 3.2 [30]. *Пусть у системы* (2.4) *существует глобально определенная нормальная форма* [31], *т.е. существует гладкое преобразование координат $x = \Phi(y, z)$ такое, что в новых координатах уравнения* (2.4) *примут вид:*

$$\dot{z} = q(z, y), \quad z \in \mathbb{R}^{n-p}; \tag{3.5}$$
$$\dot{y} = a(z, y) + B(z, y)u, \quad y \in \mathbb{R}^p.$$

Система (2.4) *будет ВСУ тогда и только тогда, когда подсистема* (3.5) (*на подмногообразии нуль-динамики*) *наделена свойством УВС относительно y.*

Отметим, что свойство УВС для z-подсистемы надо понимать только относительно функций выхода системы (2.4), а не относительно любого измеряемого входа y для z-подсистемы. Определение свойства устойчивости от выхода к состоянию и входу (когда вектора состояния и входа ограничены не только нормой выхода, но и нормами его производных) дано в [32], подобное свойство может рассматриваться в качестве развития свойств ВСУ и робастной минимально-фазовости [5]. В [29, 33] было предложено несколько вариантов развития свойства УВС на системы с выходом (3.1). В частности, следующее свойство является огрубленным аналогом свойства детектируемости в нуле (см. определение 3.2 и [24]), его также можно рассматривать как развитие свойства ВСУ на системы с входом (3.1). В данном случае векторная функция h – непрерывно дифференцируема.

Определение 3.6 [29]. *Система* (3.1) *называется вход-выход – вектор состояния устойчивой* (*ВВСУ*), *если существуют функции $\beta \in \mathcal{KL}$ и $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K}$ такие, что $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\forall\, u \in M_{\mathbb{R}^m}$ и всех $t \in [0, t_{\max}(x_0, u))$ выполнено*

$$|x(t, x_0)| \leqslant \beta(|x_0|, t) + \gamma_1(||u_{[0,t]}||) + \gamma_2(||y_{[0,t]}||).$$

Здесь $t_{\max}(x_0, u) \leqslant +\infty$ задает интервал определения решения системы (3.1), $y(t) = h[\,x(t, x_0, u)\,]$ – как и ранее, функция выхода.

Определение 3.7 [29]. *ВВСУ функция Ляпунова для системы* (3.1) *будет функция V со следующими свойствами:*

1. *Существуют функции $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$ такие, что выполнено*

$$\alpha_1(|x|) \leqslant V(x) \leqslant \alpha_2(|x|) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n;$$

2. *Функция V непрерывно дифференцируема вдоль траекторий системы* (3.1), *при этом существуют функции $\alpha, \sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{K}_\infty$ такие, что*

$$DV(x)f(x,u) \leqslant -\alpha(|x|) + \sigma_1(|u|) + \sigma_2(|y|) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m.$$

В условиях определений 3.6 и 3.7 теорема 3.2 допускает следующее развитие.

Теорема 3.3 [29]. *Система* (3.1) *является ВВСУ тогда и только тогда, когда у нее существует ВВСУ функция Ляпунова.*

Дополнительные эквивалентные способы задания свойства ВВСУ приведены в [34]. Оба свойства, ВСУ и УВВС, имеют схожие формулировки в виде оценок на решения системы, заданные функциями из классов $\mathcal{KL}$, $\mathcal{K}$, следующие из соответствующих функций Ляпунова, что позволяет отнести свойства к общей УВС концепции.

3.4. Связь ВВСУ и существования наблюдателя нормы вектора состояния

Кроме элегантной теоретической формулировки в рамках УВС концепции свойство ВВСУ имеет интересный практический аспект, связанный с существованием наблюдателя нормы вектора состояния для этого типа систем.

Определение 3.8 [35]. *Система $\dot{z} = g(z,y,u)$, $\psi = \kappa(z,y)$, $z \in \mathbb{R}^l$, $g : \mathbb{R}^{l+p+m} \to \mathbb{R}^l$, $\kappa : \mathbb{R}^{l+p} \to \mathbb{R}_+$, называется наблюдателем нормы вектора состояния для* (3.1), *если:*

а) существуют функции $\beta_1 \in \mathcal{KL}$ и $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K}$ такие, что для всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $z_0 \in \mathbb{R}^l$, $u \in M_{\mathbb{R}^m}$ на всем интервале определения решений выполняется

$$|\psi(t, z_0, y(t, x_0, u), u)| \leqslant \beta_1(|z_0|, t) + \gamma_1(||y||_{[0,t]}) + \gamma_2(||u||_{[0,t]});$$

б) существуют функции $\beta_2 \in \mathcal{KL}$ и $\rho \in \mathcal{K}$ такие, что для всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $z_0 \in \mathbb{R}^l$, $u \in M_{\mathbb{R}^m}$ на всем интервале определения решений выполняется

$$|x(t, x_0, u)| \leqslant \beta(|x_0| + |z_0|, t) + \rho(|\psi(t, z_0, y(t, x_0, u), u)|).$$

Теорема 3.4 [35]. *Система* (3.1) *допускает существование наблюдателя нормы вектора состояния тогда и только тогда, когда она ВВСУ.*

Как уже отмечалось, свойство ВВСУ является огрубленным аналогом свойства детектируемости (т.е. при тождественно равных нулю входе и выходе вектор состояния стремится к нулю, а при ограниченных входе и выходе состояние также ограничено). Согласно последнему утверждению наличие этого свойства означает существование механизма вычисления количественных оценок на норму состояния (ограниченность на качественном уровне следует из самого свойства). Например если система обладает ВВСУ функцией Ляпунова из определения 3.7, то для $z \in \mathbb{R}_+$ можно выбрать $g(z,y,u) = -\alpha \circ \alpha_2^{-1}(z) + \sigma_1(|u|) + \sigma_2(|y|)$, $\kappa(z,y) = \alpha_1^{-1}(z)$, $\rho(s) = s$.

3.5. Устойчивость от входа к выходу

Рассмотрим обобщение свойства УВС на системы с выходом (3.1) (определение используемого здесь свойства наблюдаемости неограниченности (НН) приведено в разделе 6).

Определение 3.9 [33, 36]. *Система* (3.1), *наделенная свойством НН, является устойчивой по входу-выходу (УВВ), если существуют функция $\beta \in \mathcal{KL}$ и $\gamma \in \mathcal{K}$ такие, что $\forall\, t \geqslant 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $u \in M_{\mathbb{R}^m}$ выполняется*

$$|y(x_0, u, t)| \leqslant \beta(|x_0|, t) + \gamma(||u||);$$

если дополнительно система устойчива по Лагранжу по выходу (ЛУВ), т.е. существуют функции $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{K}$ *такие, что для* $\forall\, t \geqslant 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *выполняется*

$$|y(x_0, d, t)| \leqslant \sigma_1(|h(x_0)|) + \sigma_2(||u||),$$

то система называется устойчивой по Лагранжу от входа к выходу (ЛУВВ);

если для системы существуют функции $\beta \in \mathcal{KL}$ *и* $\gamma \in \mathcal{K}$ *такие, что для* $\forall\, t \geqslant 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *выполняется*

$$|y(x_0, u, t)| \leqslant \beta(|h(x_0)|, t) + \gamma(||u||),$$

то система называется устойчивой от входа к выходу независимо от вектора состояния (УВВНС);

система называется робастно устойчивой по выходу (РУВ), если для нее существуют функции $\lambda \in \mathcal{K}_\infty$ *и* $\beta \in \mathcal{KL}$ *такие, что система*

$$\dot{x} = g(x, d) = f(x, d\lambda(|y|)), \quad y = h(x)$$

наделена свойством НН и оценка

$$|y_\lambda(x_0, d, t)| \leqslant \beta(|x_0|, t)$$

выполнена $\forall\, t \geqslant 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $d \in M_B$, *где* $B = \{d \in \mathbb{R}^m : |d| \leqslant 1\}$ *и* $y_\lambda(x_0, d, t)$ – *решение по выходу этой системы.*

Для случая $h(x) = x$ свойства УВВ и УВВНС редуцируются к УВС. В случае исследования асимптотических свойств устойчивости по выходу необходимо предусматривать существование решений для всех $t \geqslant 0$, так как в общем случае возможна ситуация, когда выход $y(t)$ ограничен или стремится к нулю, в то время как решение $x(t)$ существует только на конечном интервале времени (для решения этой проблемы в определении 3.9 и вводится свойство НН, ослабленный аналог свойства продолжимости решений для систем с выходом). Отличие свойства УВВ от УВС (УВВНС) состоит в том, что для УВВ системы из малости $|h(x_0)|$ не следует, что общее отклонение системы $|y(t)|$ будет мало, оно пропорционально неоцениваемой величине $|x_0|$. Для УВС или УВВНС систем в $\mathcal{KL}$ оценках слева и справа стоит одинаковая переменная ($x(t)$ или $y(t)$ соответственно). В заключение, можно следующим образом прокомментировать робастную устойчивость по выходу системы (3.1): система является равномерно устойчивой по выходу относительно входа из B для любого закона управления обратной связи по выходу, ограниченного функцией λ – функцией границы робастности системы.

Лемма 3.3 [36]. *Для системы* (3.1), *наделенной свойством НН, верны следующие отношения:*

$$\text{УВВНС} \Rightarrow \text{ЛУВВ} \Rightarrow \text{УВВ} \Rightarrow \text{РУВ}.$$

Все обратные соотношения в общем случае не выполняются.

Подчеркнем, что для случая устойчивости по состоянию ($h(x) = x$) из РУВ следует УВВНС.

Определение 3.10 [37, 38]. *Для системы* (3.1) *гладкая функция* V *и функция* $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ *называются УВВ функцией Ляпунова и вспомогательным модулем, если существуют функции* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$, *удовлетворяющие для всех* $x \in \mathbb{R}^n$

$$\alpha_1(|h(x)|) \leqslant V(x) \leqslant \alpha_2(|x|), \tag{3.6}$$

и существует $\chi \in \mathcal{K}$ *и* $\alpha_3 \in \mathcal{KL}$ *такие, что для всех* $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$

$$V(x) > \chi(|u|) \Rightarrow DV(x)f(x, u) \leqslant -\alpha_3\left(V(x), \lambda(x)\right); \tag{3.7}$$

дополнительно, для всех $u \in M_{\mathbb{R}^m}$ *и* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *и для некоторой* $\delta \in \mathcal{K}$ *для любого* $T \geqslant 0$*:*

$$V\left(x(t, x_0, u)\right) > \chi(|u(t)|),$$
$$t \in [0, T) \;\Rightarrow\; \lambda\left(x(t, x_0, u)\right) \leqslant \max\left\{\delta(|x_0|), \delta(||u||)\right\}.$$

Функция V *называется ЛУВВ функцией Ляпунова, если неравенство* (3.6) *может быть усилено до:*

$$\alpha_1(|h(x)|) \leqslant V(x) \leqslant \alpha_2(|h(x)|), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty. \tag{3.8}$$

Функция V *называется УВВНС функцией Ляпунова, если для некоторых* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$ *выполнено неравенство* (3.8) *и существуют функции* $\chi, \alpha_3 \in \mathcal{K}$ *такие, что для всех* $x \in \mathbb{R}^n$ *и* $u \in \mathbb{R}^m$*:*

$$V(x) > \chi(|u|) \quad \Rightarrow \quad DV(x)f(x, u) \leqslant -\alpha_3\left(V(x)\right).$$

Функция V *называется РУВ функцией Ляпунова, если для некоторых* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$ *выполнено неравенство* (3.6) *и существуют функции* $\chi \in \mathcal{K}$ *и* $\alpha_3 \in \mathcal{KL}$ *такие, что для всех* $x \in \mathbb{R}^n$ *и* $u \in \mathbb{R}^m$*:*

$$|y| > \chi(|u|) \quad \Rightarrow \quad DV(x)f(x, u) \leqslant -\alpha_3\left(V(x), |x|\right).$$

В [37] УВВ функция Ляпунова вводилась для систем, наделенных свойством ограниченный-вход-ограниченное-состояние (ОВОС), определенным в разделе 6. В этом случае функция $|x|$ может быть использована в качестве вспомогательного модуля λ, а неравенство (3.7) может быть представлено следующим образом:

$$V(x) > \chi(|u|) \quad \Rightarrow \quad DV(x)f(x, u) \leqslant -\alpha_3(V(x), |x|).$$

Теорема 3.5 [37, 38]. *Пусть система* (3.1) *наделена свойством НН. Следующие свойства являются эквивалентными:*

1) *система* (3.1) *УВВ* (*ЛУВВ, УВВНС*)*;*

2) *у системы* (3.1) *существует УВВ* (*ЛУВВ, УВВНС*) *функция Ляпунова и вспомогательный модуль.*

Подчеркнем, что для случая УВВНС вспомогательный модуль не требуется.

Теорема 3.6 [37]. *Пусть система* (3.1) *наделена свойством ОВОС. Тогда если у системы* (3.1) *существует УВВ* (*ЛУВВ, УВВНС, РУВ*) *функция Ляпунова со вспомогательным модулем* $|x|$*, то система* (3.1) *является УВВ* (*ЛУВВ, УВВНС, РУВ*).

Отличие свойств УВВ и УВВНС становится более явным при сравнении соответствующих функций Ляпунова. Для свойства УВВНС функция Ляпунова ограничена сверху функцией расстояния до множества, тогда как для УВВ системы функция Ляпунова может возрастать пропорционально норме вектора состояния. В соответствии с концепцией УВС систем свойство устойчивости от входа к выходу в ряде случаев может быть охарактеризовано с использованием асимптотических коэффициентов.

Определение 3.11 [39]. *Система* (3.1)*, наделенная свойством НН, имеет асимптотический коэффициент усиления по выходу, если для всех* $u \in M_{\mathbb{R}^m}$ *и* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *существует функция* $\gamma \in \mathcal{K}$ *такая, что*

$$\varlimsup_{t \to +\infty} |y(t, x_0, u)| \leqslant \gamma\left(||u||\right).$$

Теорема 3.7 [39]. *Система (3.1), наделенная свойством НН, является УВВ тогда и только тогда, когда она ЛУВ и имеет асимптотический коэффициент усиления по выходу.*

Устойчивость нелинейных систем – сложная область исследования, поэтому в ряде случаев, когда не удается построить требуемую функцию Ляпунова, проще использовать эквивалентные формулировки устойчивости в виде асимптотических коэффициентов усиления, приведенные в определениях 2.2–3.11.

3.6. Свойства УВС и ИУВС по отношению к множеству

Расширение свойства УВС на случай компактных множеств содержится в [40–42]. В этом случае предполагается, что система (2.3) имеет компактное инвариантное при нулевом входе u множество $\mathcal{A}$. Система (2.3) называется УВС по отношению к $\mathcal{A}$, если для любого входа $u \in M_{\mathbb{R}^m}$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существуют функции $\beta \in \mathcal{KL}$, $\gamma \in \mathcal{K}$ такие, что $\forall\, t \geqslant 0$

$$|x(t, x_0, u)|_{\mathcal{A}} \leqslant \beta(|x_0|_{\mathcal{A}}, t) + \gamma(||u||).$$

Если $\mathcal{A} = \{0\}$, то последнее неравенство редуцируется к стандартной оценке из определения 2.1. При $u = 0$ свойство УВС по отношению к компактному множеству сводится к свойству робастной глобальной асимптотической устойчивости (РГАУ), введенному в разделе 6. Свойство УВС по отношению к множеству также является вариантом формулировки свойства практической устойчивости по входу-состоянию [43], когда для всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $u \in M_{\mathbb{R}^m}$ существуют функции $\beta \in \mathcal{KL}$, $\gamma \in \mathcal{K}$ и константа $\varepsilon > 0$ такие, что

$$|x(t, x_0, u)| \leqslant \beta(|x_0|, t) + \gamma(||u||) + \varepsilon.$$

Оказывается, что УВС функция Ляпунова для компактных множеств формулируется аналогично определению 2.4 и является эквивалентом УВС по отношению к компакту $\mathcal{A}$: гладкая функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ называется УВС функцией Ляпунова по отношению к $\mathcal{A}$, если существуют функции $\alpha_1, \alpha_2, \alpha \in \mathcal{K}_\infty$ и $\theta \in \mathcal{K}$ такие, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ выполнены неравенства

$$\alpha_1(|x|_{\mathcal{A}}) \leqslant V(x) \leqslant \alpha_2(|x|_{\mathcal{A}}),$$
$$DV(x)f(x, u) \leqslant \theta(|u|) - \alpha(|x|_{\mathcal{A}}).$$

Отметим, что подстановка $h(x) = |x|_{\mathcal{A}}$ переводит свойство УВС по отношению к множеству $\mathcal{A}$ в свойство УВВНС по выходу $y = h(x)$. Подчеркнем, что УВВНС не является вариантом свойства УВС по отношению к множеству в иных обозначениях, УВВНС является более “сложным” свойством устойчивости, так как в общем случае стремление $y(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ может не означать, что одновременно $x(t) \to Z$. Случай некомпактного множества $\mathcal{A}$ анализируется в [44]. Для случая некомпактного множества $\mathcal{A}$ необходимо учитывать определенность решений системы (3.1) для всех $t \geqslant 0$ и вводить требование на наличие свойства продолжимости решений или по аналогии с УВВ свойства НН. Свойство ИУВС по отношению к множеству сформулировано в [45]: система (2.3) называется ИУВС по отношению к $\mathcal{A}$, если для любого входа $u \in M_{\mathbb{R}^m}$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существуют функции $\beta \in \mathcal{KL}$, $\alpha, \gamma \in \mathcal{K}_\infty$ такие, что $\forall\, t \geqslant 0$

$$\alpha(|x(t, x_0, u)|_{\mathcal{A}}) \leqslant \beta(|x_0|_{\mathcal{A}}, t) + \int\limits_0^t \gamma(|u(\tau)|)\, d\tau.$$

Для $\mathcal{A} = \{0\}$ последнее неравенство редуцируется к оценке из определения 2.7 и при $u = 0$ свойство ИУВС по отношению к множеству сводится к свойству РГАУ. Функция Ляпунова для этого свойства строится аналогично определению 3.1: непрерывно дифференцируемая функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ называется ИУВС функцией Ляпунова по отношению к множеству $\mathcal{A}$, если для нее существуют функции $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$, $\sigma \in \mathcal{K}$ и положительно определенная непрерывная функция α такие, что $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$

$$\alpha_1(|x|_{\mathcal{A}}) \leqslant V(x) \leqslant \alpha_2(|x|_{\mathcal{A}}),$$
$$DV(x)f(x,u) \leqslant -\alpha(|x|_{\mathcal{A}}) + \sigma(|u|).$$

Отличие между УВС и ИУВС функциями Ляпунова по отношению к множеству состоит в требованиях, предъявляемых к функции α (для УВС случая $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$). Существование у системы ИУВС функции Ляпунова по отношению к компактному множеству $\mathcal{A}$ служит достаточным условием для ИУВС по отношению к $\mathcal{A}$. По аналогии с теоремой 3.1 можно показать [45], что другими достаточными условиями свойства ИУВС по отношению к компактному множеству $\mathcal{A}$ являются:

1. Существует выход h ($|h(x)| \leqslant \kappa(|x|_{\mathcal{A}})$, $\kappa \in \mathcal{K}_\infty$) со свойством $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y(t, x_0, 0) = 0$, $t \geqslant 0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} |x(t, x_0, 0)|_{\mathcal{A}} = 0$, и существуют непрерывно дифференцируемая функция $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$, $\sigma \in \mathcal{K}$ и положительно определенная функция α_4 такие, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$

$$\alpha_1(|x|_{\mathcal{A}}) \leqslant W(x) \leqslant \alpha_2(|x|_{\mathcal{A}}),$$
$$DW(x)f(x,u) \leqslant -\alpha_4(|h(x)|) + \sigma(|u|);$$

2. Выполнено свойство РГАУ по отношению к $\mathcal{A}$ для $u = 0$, и существует непрерывно дифференцируемая функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$, $\sigma \in \mathcal{K}$ такие, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$

$$\alpha_1(|x|_{\mathcal{A}}) \leqslant V(x) \leqslant \alpha_2(|x|_{\mathcal{A}}),$$
$$DV(x)f(x,u) \leqslant \sigma(|u|).$$

3.7. Связь свойств УВВ, УВС и ВВСУ

Свойство УВВ характеризует “внешнюю” устойчивость системы (3.1), т.е. устойчивость по отношению к внешним для системы входному и выходному сигналам. Свойство УВС гарантирует “внутреннюю” устойчивость системы, или ограниченность вектора состояния в присутствии ограниченного входа. Интуитивно свойство робастной детектируемости (ВВСУ) задает связь между “внешними” сигналами u, y и “внутренним” состоянием системы x – связь между “внешней” и “внутренней” устойчивостью. Оказывается, эта интуитивная связь имеет фундаментальное приложение.

Т е о р е м а 3.8 [43]. *Система* (3.1) *является УВС тогда и только тогда, когда она ВВСУ и УВВ.*

Заканчиваем рассмотрение каталога свойств, полученных в рамках УВС концепции, и переходим к представлению результатов по использованию рассматриваемой теории в приложениях. Более подробно список различных свойств, сопутствующих УВС, дан в обзоре [2].

4. Соединения УВС, ИУВС и ЛУВС систем

Концепция УВС оказывается удобной для изучения различных соединений нелинейных систем, что, в частности, позволяет исследовать системы большой размерности. Рассмотрим n уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \ldots, x_n, u_i), \ i = 1, \ldots, n, \tag{4.1}$$

где для i-го уравнения $x_i \in \mathbb{R}^{N_i}$ является состоянием, а $x_j \in \mathbb{R}^{N_j}$, $j \neq i$, и $u_i \in \mathbb{R}^{M_i}$ – входом. Обозначая $N = \sum_{i=1}^n N_i$, $M = \sum_{i=1}^n M_i$, $x = (x_1^{\mathrm{T}}, \ldots, x_n^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, $u = (u_1^{\mathrm{T}}, \ldots, u_n^{\mathrm{T}})$ и соответствующим образом вводя $f : \mathbb{R}^{N+M} \to \mathbb{R}^N$, совокупность уравнений (4.1) можно записать в виде одной системы, являющейся соединением n подсистем,

$$\dot{x} = f(x, u). \tag{4.2}$$

Рассуждая обратным образом, систему большой размерности (4.2), нередко удается представить в виде соединения нескольких систем (4.1) меньшей размерности. Возникает вопрос: можно ли по свойствам УВС/ИУВС каждой из подсистем в (4.1) сделать вывод об устойчивости целой системы (4.2). Анализ или синтез свойства УВС/ИУВС для редуцированных систем (4.1) меньшей размерности может в ряде случаев иметь более простое решение, чем для (4.2). Каждой такой связной системе можно сопоставить сеть или граф, вершинами которого являются отдельные системы $i = 1, \ldots, n$, а направленное ребро от вершины i к вершине j принадлежит графу тогда и только тогда, когда x_i является входом для системы j, т.е. когда f_j явно зависит от x_i, в противном случае это ребро отсутствует. Предположим, что каждая система (4.1) является УВС, т.е. для любого входа x_j, $i \neq j = 1, \ldots, n$, $u_i \in \mathbb{R}^{M_i}$ и начального состояния x_i^0 выполняется

$$|x_i(t)| \leqslant \max\left\{\beta(|x_i^0|, t), \max_{j=1,\ldots,n} \gamma_{ij}(||x_j||), \gamma_i(||u||)\right\} \tag{4.3}$$

(напомним, что будет получено эквивалентное определение УВС, если в этом неравенстве максимумы соответствующих функций заменить их суммой). Что можно сказать об устойчивости всей системы (4.2)? Оказывается, что последовательное соединение систем УВС всегда является УВС. Для двух систем это легко показать, используя определение УВС для траекторий и подставляя одну оценку в другую. Кроме того, не сложно построить функцию Ляпунова для такого соединения, если даны функции Ляпунова для каждой из подсистем. Эти рассуждения легко обобщаются на случай произвольной структуры последовательного соединения $n \geqslant 2$ систем, т.е. такого соединения, граф которого является деревом (не содержит ни одного цикла). В случае соединения с обратной связью устойчивость может нарушаться. Для установления устойчивости двух систем с обратной связью были разработаны условия малости коэффициента усиления [43]:

$$\gamma_{12} \circ \gamma_{21}(s) < s \quad \forall s > 0, \tag{4.4}$$

означающие, что композиция этих функций является сжимающим отображением. Если же в определении УВС влияние входа отражено суммой коэффициентов усиления вместо максимума этих функций, то условие малого коэффициента запишется в виде [46]:

$$(s + \alpha_1(s)) \circ \gamma_{12} \circ (s + \alpha_2(s)) \circ \gamma_{21}(s) < s \quad \forall s > 0, \tag{4.5}$$

где α_1, α_2 могут быть выбраны произвольными из класса $\mathcal{K}$-функций. Более того, в случае, если это условие выполняется, функция Ляпунова может быть сконструирована явно в виде специальной комбинации функций Ляпунова подсистем [46]. Эти результаты были обобщены для случая двух ИУВС систем [47], а также для соединения дискретных систем, систем с запаздыванием, гибридных систем и некоторого класса систем, не удовлетворяющих полугрупповому свойству [14]. В случае произвольного соединения УВС систем ($n \geqslant 2$) общее количество коэффициентов усиления всего соединения растет пропорционально n^2. Эти коэффициенты удобно собрать в матрицу

$$\Gamma := \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & 0 & \ddots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

и определить нелинейный оператор в зависимости от используемого определения УВС:

$$\Gamma_{\max}(s_1, \dots, s_n)^{\mathrm{T}} := \left(\max_{j=1,\dots,n} \gamma_{1j}(s_j), \dots, \max_{j=1,\dots,n} \gamma_{nj}(s_j) \right)^{\mathrm{T}} \tag{4.7}$$

в случае определения с максимумом по коэффициентам усиления или

$$\Gamma_{\sum}(s_1, \dots, s_n)^{\mathrm{T}} := \left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_{1j}(s_j), \dots, \sum_{j=1}^{n} \gamma_{nj}(s_j) \right)^{\mathrm{T}}, \tag{4.8}$$

если в этом определении используется сумма коэффициентов усиления. Для формулировки дальнейших результатов введем обозначение

$$a > b \quad \Leftrightarrow \quad a_i > b_i \quad \forall\, i = 1, \dots, n.$$

Аналогично определяются соотношения $a < b,\ a \leqslant b,\ a \geqslant b$. Логическое отрицание последнего будем обозначать $a \not\geqslant b$, что означает, что существует индекс i, такой что $a_i < b_i$.

Теорема 4.1 [48]. *Пусть каждая из систем* (4.1) *является УВС с коэффициентами усиления, данными в* (4.3). *Если выполняется*

$$\Gamma_{\max}(s) \not\geqslant s \quad \forall\, s \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}, \tag{4.9}$$

то соединение этих систем (4.2) *является УВС.*

Условие (4.9) называется условием малости коэффициента усиления. В случае использования определения УВС с суммированием коэффициентов усиления это условие заменяется на

$$D \circ \Gamma_{\sum}(s) \not\geqslant s \quad \forall\, s \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}, \tag{4.10}$$

где $D(s) := (s_1 + \alpha(s_1), \dots, s_n + \alpha(s_n))^{\mathrm{T}}$ и α – произвольная $\mathcal{K}$-функция. Если УВС функции Ляпунова для каждой системы соединения известны и соответствующие коэффициенты усиления удовлетворяют условию малости, то можно построить вспомогательные функции масштабирования $\sigma_i \in \mathcal{K},\ i = 1, \dots, n$, такие, что для любого $t > 0$ [9, 49]

$$\Gamma_{\max}(\sigma(t)) < \sigma(t), \quad \sigma(t) := (\sigma_1(t), \dots, \sigma_n(t))^{\mathrm{T}} \tag{4.11}$$

и УВС функцию Ляпунова для всего соединения можно взять в виде

$$V(x) = \max_i \left\{ \sigma_1^{-1}(V_1(x_1)), \dots, \sigma_n^{-1}(V_n(x_n)) \right\}. \tag{4.12}$$

Различные приложения этих результатов для исследования устойчивости больших систем можно найти в [9, 50]. Свойство УВС и даже более слабое свойство ИУВС может оказаться достаточно ограничительным в некоторых приложениях, поэтому иногда имеет смысл рассматривать более широкий класс систем ЛУВС. Большие соединения таких систем рассматривались в [51]. В этом случае для обеспечения устойчивости соединения условие малости коэффициента заменяется на его локальную версию, т.е. для некоторого $w^* \in \mathbb{R}^n_+$ должно выполняться

$$\Gamma(s) \ngeq s \quad \forall\, 0 \leqslant s \leqslant w^*,\ s \neq 0 \ \text{ и } \ \Gamma(w^*) < w^*. \tag{4.13}$$

Примечательно, что локальная версия условия устойчивости не зависит от того, используется ли суммирование или максимум коэффициентов усиления в определении ЛУВС, поэтому нижний индекс $\sum$ или max у оператора Γ опущен в формуле (4.13). Построение функции Ляпунова может быть выполнено аналогично случаю соединения УВС систем. В [51] были также даны оценки ограничений на локальные условия и входы для ЛУВС свойства всего соединения, которые зависят не только от исходных ограничений для подсистем, но и от вектора w^*, входящего в условие (4.13).

5. Применение концепции УВС при синтезе и анализе систем управления

Затронем некоторые аспекты применения представленного семейства свойств робастной устойчивости для различных типов нелинейных динамических систем.

5.1. Свойство УВС для систем Лурье

Система Лурье представляет собой линейную систему, замкнутую нелинейной обратной связью по выходу:

$$\dot{x} = Ax + B(d - \phi(y)), \quad y = Cx, \tag{5.1}$$

где все матрицы соответствующей размерности имеют вещественные и постоянные коэффициенты, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $d \in \mathbb{R}^m$ – векторы состояния, выхода и возмущения.

Теорема 5.1 [52]. *Пусть у системы* (5.1) *пара матриц* (C, A) *является наблюдаемой и существует матрица* $P = P^{\mathrm{T}} \geqslant 0$ *такая, что* $A^{\mathrm{T}}P + PA \leqslant 0$, $PB = C^{\mathrm{T}}$. *Если существует* $\mu > 0$ *и* $\lambda \in \mathcal{K}_\infty$ *такие, что* $|y|\lambda(|y|) \leqslant y^{\mathrm{T}}\phi(y)$ *для всех* $y \in \mathbb{R}^m$, $|\phi(y)| \leqslant y^{\mathrm{T}}\phi(y)$ *для всех* $|y| \geqslant \mu$, *то система является УВС по отношению ко входу* d.

Отметим, что аналогичные результаты были получены ранее (см., например, [53]) в терминах ограниченности решений при ограниченном входе и асимптотической устойчивости при нулевом возмущении, что согласно теореме 2.1 эквивалентно свойству УВС. Как и в классических результатах теории абсолютной устойчивости [54, 55], здесь для доказательства УВС накладываются определенные секторные ограничения на рост функции ϕ. Подчеркнем, что условия теоремы 5.1, связанные с существованием матрицы P, не являются консервативными (например, дополнительные условия $P > 0$, $A^{\mathrm{T}}P + PA < 0$ означают пассивность линейной части системы (5.1) [56, 57] (см. определение 6.4), выбор $\phi(y) = k\,\mathrm{sign}(y)$ обеспечивает в этом случае глобальную стабилизацию системы равномерно по отношению ко всем $|d| \leqslant k$).

5.2. УВС и ИУВС пассивных систем

Свойства пассивности и строгой пассивности систем (2.4), (2.3) введены в разделе 6 в определении 6.4. Важность этих свойств состоит в их распространенности.

Любая асимптотически устойчивая при $u = 0$ система (2.4) с функцией Ляпунова V является строго пассивной по выходу $h(x) = \left[\frac{\partial V}{\partial x} G(x)\right]^{\mathrm{T}} = L_G V(x)$. Большой класс механических и физических систем являются пассивными при использовании функции полной энергии системы в качестве функции запаса V [17, 57]. Напомним, что свойство асимптотической устойчивости при нулевом входе может не сохраниться под влиянием даже исчезающего возмущения. Данный факт объясняет важность задачи анализа робастных свойств для (строго) пассивных систем и востребованность УВС/ИУВС законов управления в приложениях. Следующий результат формулирует список условий, выполнение которых для строго пассивных систем означает их робастность по отношению к L_2 входам без дополнительного управления.

Лемма 5.1 [58]. *Пусть система* (2.4) *является строго пассивной с дифференцируемой положительно определенной и радиально неограниченной функцией запаса V и выполнено одно из следующих условий:*

а) $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{|h(x)|}{V(x)} < +\infty$;

б) $\left|\dfrac{\partial V}{\partial x} G(x)\right| \leqslant b[V(x)]$ *для всех* $x \in \mathbb{R}^n$, *где* $b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *– положительно определенная функция и*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dr}{1 + b(r)} = +\infty.$$

Тогда строго пассивная система (2.4) *является ИУВС по входу* u.

Вернемся к задаче робастной стабилизации. Известно [24], что закон управления

$$u = -\varphi(y) + v, \tag{5.2}$$

где $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ – непрерывная функция, $y^{\mathrm{T}}\varphi(y) > 0$, для всех $y \neq 0$, $v \in \mathbb{R}^m$ – новый вектор возмущений (робастность по отношению к которому требуется установить), обеспечивает пассивной системе (2.4) свойство глобальной асимптотической устойчивости для $v = 0$ при условии, что система является детектируемой в нуле по выходу y (определение 3.2). Поэтому далее будем анализировать достоинства управления (5.2).

Лемма 5.2 [58]. *Пусть система* (2.4) *является строго пассивной с дифференцируемой положительно определенной и радиально неограниченной функцией запаса V. Тогда управление* (5.2) *обеспечивает свойство ИУВС по отношению к v, если $y^{\mathrm{T}}\varphi(y) \geqslant \varepsilon |y|^2$, $\varepsilon > 0$, для всех $y \in \mathbb{R}^m$. Если в определении 6.4 функция $\beta \in \mathcal{K}_\infty$, то управление* (5.2) *обеспечивает системе* (2.4) *свойство УВС, при этом V – соответствующая УВС функция Ляпунова.*

Лемма 5.2 устанавливает связь между формой функции β и робастностью системы (2.4), (5.2) по отношению к входам из L_∞ или L_2. Важным следствием из этой леммы служит следующий факт: строго пассивные системы могут быть наделены свойством УВС/ИУВС с использованием сколь угодно малого коэффициента усиления обратной связи по выходу (ε может быть выбрано произвольным). Отметим, что управление (5.2) синтезировано по методу скоростного градиента [57]. Далее рассмотрим задачу УВС/ИУВС стабилизации для пассивных систем.

Теорема 5.2 [58]. *Пусть система* (2.4) *является пассивной с дифференцируемой положительно определенной и радиально неограниченной функцией запаса V. Управление* (5.2) *обеспечивает для этой системы:*

а) свойство ИУВС, если система детектируема в нуле по выходу $h(x) = L_G V(x)$ и выполнено одно из условий а) или б) леммы 3.1;

б) свойство УВС, если верно неравенство $\theta(|x|) \leqslant |h(x)|$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и некоторой $\theta \in \mathcal{K}_\infty$, и $y^{\mathrm{T}}\varphi(y) \geqslant \varepsilon\,|y|^2$, $\varepsilon > 0$, для всех $y \in \mathbb{R}^m$.

П. *а*) теоремы 5.2 развивает результат [24] об асимптотической стабилизации пассивных систем на ИУВС стабилизацию.

5.3. УВС/УВВ стабилизация с использованием бэкстеппинга

Бэкстеппинг (метод обратного обхода интегратора) является одним из наиболее распространенных методов синтеза нелинейных законов управления [59]. Задача УВС и ИУВС стабилизации с использованием бэкстеппинга решается в [25]. Независимо вариант бэкстеппинга был получен в [60], получив название метода аналитического конструирования агрегированных регуляторов. Данный метод формирует основной аналитический подход к расчету алгоритмов регулирования в синергетической теории управления, предложенной в [60] (см. также монографию [57] и обзор [61]).

В этом случае рассматривается модифицированная система (2.4):

$$\dot{x} = f(x) + G_1(x)z + G_2(x)d, \tag{5.3}$$

$$\dot{z} = u + F(x,z)d, \tag{5.4}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ и $z \in \mathbb{R}^m$ – векторы состояния систем (5.3) и (5.4) соответственно, $u \in \mathbb{R}^m$ и $d \in \mathbb{R}^d$ – векторы управления и возмущения, все функции в правых частях (5.3), (5.4) полагаются непрерывными и локально липшицевыми, $f(0) = 0$. Предполагается, что существует гладкий закон управления $k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ такой, что при подстановке $z = k(x)$ в уравнение (5.3) система становится УВС (ИУВС) по состоянию x и входу d. Требуется "перенести" этот закон управления через интегратор и предложить новое гладкое управление $u = \widehat{k}(x,z)$, обеспечивающее свойство УВС (ИУВС) для всей системы (5.3), (5.4). Так как система (5.3) с законом управления $z = k(x)$ является УВС (ИУВС), то необходимо существует соответствующая гладкая функция Ляпунова $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ такая, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^d$

$$\alpha_1(|x|) \leqslant W(x) \leqslant \alpha_2(|x|),$$
$$DW(x)[f(x) + G_1(x)k(x) + G_2(x)d] \leqslant -\alpha(|x|) + \sigma(|d|)$$

для некоторых функций $\alpha_1, \alpha_2, \alpha \in \mathcal{K}_\infty$, $\sigma \in \mathcal{K}$ (для случая ИУВС функция α положительно определенная). Следуя [25, 59], выберем для системы (5.3), (5.4) УВС (ИУВС) функцию Ляпунова в виде $V(x,z) = W(x) + \dfrac{1}{2}\,|z - k(x)|^2$, ее полная производная по времени имеет вид

$$\begin{aligned}
&\dot{V} = DW(x)[f(x) + G_1(x)z + G_2(x)d] + \\
&+ [z - k(x)]\,[u + F(x,z)d - Dk(x)\{f(x) + G_1(x)z + G_2(x)d\}] \leqslant \\
&\leqslant -\alpha(|x|) + \sigma(|d|) + [z - k(x)]\,[u + DW(x)G_1(x) + F(x,z)d - \\
&- Dk(x)\{f(x) + G_1(x)z + G_2(x)d\}].
\end{aligned}$$

Тогда, используя прямые вычисления, можно показать, что для управления $u = Dk(x)\{f(x) + G_1(x)z\} - DW(x)G_1(x) - [z - k(x)]\,[1 + |F(x,z)|^2 + |Dk(x)G_2(x)|^2]$ выполнено $\dot{V} \leqslant -\alpha(|x|) - [z - k(x)]^2 + \sigma(|d|) + |d|^2$, что обеспечивает (5.3), (5.4) свойство УВС (ИУВС). Для случая УВВ стабилизации рассмотрим следующий вариант системы (5.3), (5.4):

$$(5.5)\qquad \dot{x} = f(x, z, v_1), \quad y = h(x),$$

$$(5.6)\qquad \dot{z} = u + v_2,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы (5.5). Требуется стабилизировать систему относительно множества $Z = \{x : h(x) = 0\}$, заданного нулями функции выхода $y \in \mathbb{R}^p$; $z \in \mathbb{R}^m$ – вектор состояния системы (5.6); $u \in \mathbb{R}^m$ – вектор управления; $v_1 \in \mathbb{R}^{q_1}$, $v_2 \in \mathbb{R}^{q_2}$ – вектора внешних возмущений, $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^q$, $q = q_1 + q_2$. Функции $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ и $f : \mathbb{R}^{n+m+q_1} \to \mathbb{R}^n$ – непрерывные и локально липшицевые, $f(0, 0, 0) = 0$. Предположим доступность непрерывно дифференцируемого закона управления $k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ такого, что система

$$(5.7)\qquad \dot{x} = f(x, k(x) + e, v_1)$$

наделена свойством УВВ по выходу y и входу v_1 для $e = 0$, где переменная $e = z - k(x)$ определяет ошибку реализации “виртуального” управления k (в терминах работы [60] e – агрегированная макропеременная). Учитывая управление k, необходимо синтезировать закон управления $u = U(x, z)$, обеспечивающий свойство УВВ от входа v к выходу y для всей системы (5.5), (5.6).

Теорема 5.3 [45]. *Пусть система (5.7) наделена свойством НН и существуют непрерывно дифференцируемые функции $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ и $k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ такие, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $e \in \mathbb{R}^m$ и $v_1 \in \mathbb{R}^{q_1}$:*

1.

$$(5.8)\qquad \alpha_1(|h(x)|) \leqslant V(x) \leqslant \alpha_2(|x|),\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty;$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x, k(x), v_1) \leqslant -\alpha_3(V(x)) + \sigma_1(|v_1|),$$

$\alpha_3 \in \mathcal{K}_\infty$, $\sigma_1 \in \mathcal{K}$. Существуют непрерывные функции $r : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$, $b : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}_+$, $\lambda \in \mathcal{K}$ такие, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $z, z' \in \mathbb{R}^m$ и $v_1, v_1' \in \mathbb{R}^{q_1}$

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x, z, v_1) - \frac{\partial V}{\partial x} f(x, z', v_1) \leqslant r(x, z')^{\mathrm{T}}(z - z');$$

$$(5.9)\qquad \frac{\partial k}{\partial x} f(x, z, v_1) - \frac{\partial k}{\partial x} f(x, z, v_1') \leqslant b(x, z)\lambda(|v_1 - v_1'|).$$

Тогда система (5.5), (5.6) с управлением

$$u = \frac{\partial k}{\partial x} f(x, z, 0) - r(x, k(x)) - \varphi(z - k(x)) - \frac{1}{2}\left(1 + b(x, z)^2\right)(z - k(x))$$

является УВВ, если $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ – непрерывная функция и $z^{\mathrm{T}}\varphi(z) \geqslant \kappa(|z|)$ для всех $z \in \mathbb{R}^m$, $\kappa \in \mathcal{K}_\infty$.

2. *Выполнены (5.8), (5.9) и*

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x, k(x) + e, v_1) \leqslant -\alpha_4(V(x)) + \sigma_2(|e|) + \sigma_2(|v_1|),$$

$\alpha_4 \in \mathcal{K}_\infty$, $\sigma_2 \in \mathcal{K}$. Тогда система (5.5), (5.6) с управлением

$$u = \frac{\partial k}{\partial x} f(x, z, 0) - \varphi(z - k(x)) - \frac{1}{2}\left(1 + b(x, z)^2\right)(z - k(x))$$

наделена свойством УВВ, где $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ – непрерывная функция и $z^{\mathrm{T}}\varphi(z) \geqslant \kappa(|z|)$ для всех $z \in \mathbb{R}^m$, $\kappa \in \mathcal{K}_\infty$, $\kappa(s) \geqslant \tilde{\kappa}(s) + \sigma_2(s)$, $\tilde{\kappa} \in \mathcal{K}_\infty$.

Первая часть теоремы 5.3 развивает результат по УВС/ИУВС стабилизации бэкстеппингом системы (5.3), (5.4) на случай устойчивости от входа к выходу, тогда как вторая часть этой теоремы представляет расширение идей метода аналитического конструирования агрегированных регуляторов [60] на задачу УВВ стабилизации. В [62] представлено развитие результата теоремы 5.3 на случай адаптивной стабилизации от входа к выходу.

5.4. Универсальные законы УВС, ИУВС, УВВ стабилизации

Известно, что при выполнении определенных ограничений существование у системы функции Ляпунова с заданными свойствами эквивалентно асимптотической устойчивости системы. К сожалению, практическое применение этой теории осложнено отсутствием общих методов построения функций Ляпунова для выбранной нелинейной системы. Задача упрощается с появлением управления в правой части динамической системы. В этом случае выбором закона управления можно назначить системе желаемую функцию Ляпунова. Возникает вопрос: какой метод использовать для расчета управления и какая функция Ляпунова является допустимой (может быть назначена) для системы? Рассмотренный в п. 5.3 бэкстеппинг обладает строгими ограничительными условиями его применимости. Означает ли невозможность его применения для выбранной системы и/или функции Ляпунова, что с использованием другого метода невозможно найти решение задачи? Теория управляющих функций Ляпунова (УФЛ) предлагает ответ на этот вопрос [63–66] (см. также монографию [56]). В [64] предлагаются условия, являющиеся необходимыми и достаточными для того, чтобы данная функция Ляпунова могла быть назначена для системы с использованием некоторого почти гладкого (непрерывного везде и гладкого вне начала координат) закона управления. В [64] предлагается и вариант закона управления, решающего эту задачу.

Определение 5.1 [64]. *Дифференцируемая положительно определенная и радиально неограниченная функция* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ *называется УФЛ для системы* (2.4), *если для любого* $|x| \neq 0$ *существует* $u \in \mathbb{R}^m$ *такое, что*

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x}[f(x) + G(x)u] < 0.$$

Функция V *наделена свойством малости управления* (*small control property*) *для системы* (2.4), *если*

$$\lim_{|x|\to 0} \sup \frac{L_f V(x)}{|\,L_G V(x)\,|} \leqslant 0.$$

Теорема 5.4 [64]. *Дифференцируемая положительно определенная и радиально неограниченная функция* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ *является УФЛ для системы* (2.4), *если для всех* $|x| \neq 0$ *выполнено*

$$L_G V(x) \equiv 0 \Rightarrow L_f V(x) < 0. \tag{5.10}$$

Дополнительно: для УФЛ функции V *закон управления*

$$u = -\kappa\left(L_f V(x), |L_G V(x)|\right) L_G V(x)^{\mathrm{T}}, \tag{5.11}$$

$$\kappa(s,r) = \begin{cases} (s + \sqrt{s^2 + b^4})r^{-2}, \text{ если } r \neq 0, \\ 0, \text{ если } r = 0, \end{cases} \tag{5.12}$$

глобально асимптотически стабилизирует систему (2.4). *Управление* (5.11) *является непрерывной функцией* (*почти гладкой, если все* f, G *и* V *– гладкие*), *если функция* V *наделена свойством малости управлений.*

Подчеркнем, что если существует некоторый закон управления $u = u(x)$, назначающий системе функцию Ляпунова V, то необходимо выполнено (5.10) и, следовательно, управление (5.11) также стабилизирует систему. В силу этого свойства в современной англоязычной литературе принято называть закон управления (5.11) “универсальным”. Также сто́ит отметить, что алгоритм (5.11) является частным случаем $L_G V$ законов управления (метода скоростного градиента). Развитие УФЛ теории на задачу УВС, ИУВС и УВВ стабилизации представлено в [67–69], для чего рассматривается возмущенная модификация системы (2.4) следующего вида:

$$\dot{x} = f(x, v) + G(x)u, \quad y = h(x), \tag{5.13}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$, $v \in \mathbb{R}^r$ – вектора состояния, входа, выхода и внешнего возмущения соответственно; f, h и столбцы матричной функции G – непрерывные и локально липшицевые векторные функции, $h(0) = 0$, $f(0, 0) = 0$.

Определение 5.2. Для системы (5.13) *будем называть положительно определенную и радиально неограниченную дифференцируемую функцию $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ УВС* (*ИУВС*) *УФЛ, если существует функция $\chi \in \mathcal{K}_\infty$ и $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$* (*положительно определенная функция $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$*) *такие, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $v \in \mathbb{R}^r$*

$$\inf_{u \in \mathbb{R}^m} \{a(x, v) + B(x)u\} < -\alpha(|x|) + \chi(|v|),$$

где $a(x, v) = DV(x)f(x, v)$, $B(x) = DV(x)G(x)$.

Теорема 5.5. Если УВС (*ИУВС*) *УФЛ V для системы* (5.13) *наделена свойством малости управлений, то управление*

$$u = \kappa(\omega(x), |B(x)|^2)B(x)^{\mathrm{T}}, \quad \mu(x) + \alpha(|x|)/3 \leqslant \omega(x) \leqslant \mu(x) + 2\,\alpha(|x|)/3, \tag{5.14}$$

$\mu(x) = \sup_{v \in \mathbb{R}^r} \{a(x, v) - \chi(|v|)\}$, *где функция $\kappa(s, r)$ определена в* (5.11), *непрерывно на $\mathbb{R}^n$ и обеспечивает системе* (5.13), (5.14) *свойство УВС* (*ИУВС*) *для $v \in M_{\mathbb{R}^r}$.*

Для случая $v = 0$ результат теоремы 5.5 редуцируется к утверждению теоремы 5.4.

Определение 5.3. Для системы (5.13) *будем называть дифференцируемую функцию $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ УВВ УФЛ для управлений $u \in \mathbb{R}^m$, если выполнены условия:*

1. *Существуют $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$ такие, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$ верно* (3.6);
2. *Существует функция $\chi \in \mathcal{K}_\infty$ такая, что*

$$V(x) > \chi(|v|) \;\Rightarrow\; a(x, v) \leqslant \psi(x), \quad \psi \in C_0,$$

и для всех $x \notin Z$

$$\inf_{u \in \mathbb{R}^m} \{\psi(x) + B(x)u\} < 0,$$

где $a(x, v) = DV(x)f(x, v)$, $B(x) = DV(x)G(x)$. Если вместо (3.6) *верно* (3.8), *то такую функцию называют ЛУВВ УФЛ для управлений $u \in \mathbb{R}^m$. Говорят, что функция V наделена свойством малости управлений по отношению к выходу y, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $h(x) \neq 0$, $|h(x)| < \delta$ существует управление $u \in \mathbb{R}^m$ с $|u| < \varepsilon$ и $\psi(x) + B(x)u < 0$.*

Второе условие последнего определения может быть переписано более конструктивным способом:

$$V(x) > \chi(|v|) \;\Rightarrow\; a(x, v) \leqslant \psi(x), \quad \psi \in C_0; \tag{5.15}$$

$$|B(x)| = 0 \;\Rightarrow\; \psi(x) < 0 \quad \forall\, x \notin Z. \tag{5.16}$$

Выражения (5.15) и (5.16) задают основные требования для УВВ или ЛУВВ УФЛ системы (5.13). Используемое в дальнейшем свойство глобальной устойчивости по модулю выхода (ГУМВ) введено в разделе 6.

Т е о р е м а 5.6. *Если УВВ (ЛУВВ) УФЛ V для системы* (5.13) *наделена свойством малости управлений по выходу y, то управление*

$$u = \kappa(\psi(x), |B(x)|^2)B(x)^{\mathrm{T}}, \tag{5.17}$$

где функция $\kappa(s, r)$ определена в (5.11)*, непрерывно на $\mathbb{R}^n$ и обеспечивает ГУМВ системе* (5.13), (5.17) *свойство УВВ (ЛУВВ) для $v \in M_{\mathbb{R}^r}$.*

Для случая $h(x) = x$ свойство ГУМВ может быть опущено и условия теоремы 5.6 совпадают с соответствующими из теоремы 5.5.

5.5. Синтез робастных наблюдателей для нелинейных систем

Рассмотрим также применение свойства УВС не только в задаче стабилизации, но и в задаче наблюдения вектора состояния нелинейных систем. Пусть [70]

$$\dot{x} = Ax + f(x) + D_1 w, \quad y = Cx + D_2 w, \tag{5.18}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $y \in \mathbb{R}^p$ – вектор измерений, $w \in \mathbb{R}^q$ – вектор внешних возмущений и шумов измерения, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – локально липшицевая непрерывная функция, все матрицы вещественные соответствующей размерности, пара (A, C) – наблюдаема. Предполагается, что решения этой системы определены для всех $t \geqslant 0$. Стандартный наблюдатель вектора состояния x для системы (5.18) имеет вид

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + f(\hat{x}) + L(y - C\hat{x}), \tag{5.19}$$

где $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ – вектор оценки для x, L – матрица наблюдателя. Требуется определить условия на матрицу L, гарантирующие свойство УВВНС системе (5.18), (5.19) по выходу $e = x - \hat{x}$ (по ошибке наблюдения) и входу w.

П р е д л о ж е н и е 5.1 [70]. *Пусть $x(t) \in X \subset \mathbb{R}^n$ для всех $t \geqslant 0$ и $|f(x) - f(\hat{x})| \leqslant k_f |x - \hat{x}|$ для всех $x \in X$, $\hat{x} \in X$ и некоторого $k_f > 0$. Если существует $P = P^{\mathrm{T}} > 0$ и матрица L такие, что*

$$\begin{bmatrix} (A - LC)^{\mathrm{T}} P + P(A - LC) + 2\alpha k_f I & P \\ P & -\dfrac{1}{2}\alpha I \end{bmatrix} < 0$$

для некоторого $\alpha > 0$ (I – единичная матрица соответствующей размерности), то система (5.18), (5.19) *наделена свойством УВВНС по выходу e и входу w.*

В предложении 5.1 предлагается искать матрицу L как решение линейного матричного неравенства, обеспечивающего ограниченность ошибки наблюдения при любом ограниченном возмущении и шуме измерения. В отсутствие w гарантируется асимптотическое наблюдение состояния x наблюдателем (5.19).

6. Вспомогательные сведения

Пусть $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел, $\mathbb{R}_+ = \{\tau \in \mathbb{R} : \tau \geqslant 0\}$ – множество неотрицательных вещественных чисел. Расстояние в $\mathbb{R}^n$ от данной точки x до множества A обозначим $|x|_A = \mathrm{dist}(\,x,\,A\,) = \inf_{\eta \in A} |x - \eta|$, тогда $|x|_{\{0\}} = |x|$ – обычная евклидова норма. Символом $||u||_{[t_0,t]}$ обозначим L_∞ норму измеримой по Лебегу и локально ограниченной почти везде функции $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m$:

$$||u||_{[t_0,t]} = \operatorname{ess\,sup}\{|u(t)|, t \in [t_0, T]\}.$$

Если $T = +\infty$, то будем просто писать $||u||$. Обозначим через $M_{\mathbb{R}^m}$ множество всех таких измеримых по Лебегу функций u со свойством $||u|| < +\infty$ и M_Ω пусть обозначает множество функций, удовлетворяющих $u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$ почти для всех $t \geqslant 0$, где Ω – компактное множество. Функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ называется положительно определенной, если она обращается в нуль только в начале координат; она называется радиально неограниченной, если $V(x) \to +\infty$ при $|x| \to +\infty$. Символом $D\,V(x)\,F(\cdot)$ обозначим производную функции V в направлении векторного поля F (если V дифференцируема) и производную Дини для непрерывной и локально липшицевой функции V:

$$DV(x)F(\cdot) = \lim_{t\to 0^+} \inf \frac{V[x + tF(\cdot) - V(x)]}{t}.$$

Производная Ли от функции $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ вдоль направления гладкого векторного поля $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ вычисляется следующим образом:

$$L_f V(x) = \partial V(x)/\partial x f(x),$$

производные Ли старших порядков определяются рекуррентно:

$$L_f^k V(x) = L_f(L_f^{k-1} V(x)).$$

Для удобства записи будем использовать обозначения:

$$L_f h(x) = \partial h(x)/\partial x f(x),$$
$$L_G h(x) = \partial h(x)/\partial x G(x),$$

здесь $G(x) = \mathrm{col}[g_1(x), \ldots, g_m(x)]$, $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – гладкие векторные функции, $i = \overline{1, m}$.

6.1. Функции сравнения

Непрерывная функция $\sigma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ принадлежит классу $\mathcal{K}$, если она строго возрастающая и $\sigma(0) = 0$; она принадлежит классу $\mathcal{K}_\infty$, если она дополнительно радиально неограниченна; непрерывная функция $\beta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ из класса $\mathcal{KL}$, если она принадлежит классу $\mathcal{K}$ по первому аргументу для любого фиксированного значения второго и строго убывает до нуля для возрастающего второго аргумента при любом фиксированном значении первого. Подобные функции сравнения были предложены в [71] (см. также раздел 5 в [53]). Существует множество методов сравнения для исследования динамических систем (см. [72–74]), однако в контексте данной работы полезными являются следующие утверждения.

Лемма 6.1 [8]. *Для любой непрерывной и положительно определенной функции $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ существует функция $\beta_\alpha \in \mathcal{KL}$ со следующим свойством: если $y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – любая (локально) абсолютно непрерывная функция, почти для всех $t \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяющая дифференциальному неравенству*

$$\dot{y}(t) \leqslant -\alpha(y(t)),$$

то для всех $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено

$$y(t) \leqslant \beta_\alpha(y(0), t).$$

Лемма 6.2 [23]. *Для любой непрерывной и положительно определенной функции $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ существует функция $\beta_\alpha \in \mathcal{KL}$ со следующим свойством: если*

$y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ и $v : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – локально абсолютно непрерывная и непрерывная функции, почти для всех $t \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяющие дифференциальному неравенству

$$\dot{y}(t) \leqslant -\alpha(\max\{\, y(t) + v(t), 0\}),$$

то для всех $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено

$$y(t) \leqslant \max\{\, \beta_\alpha(y(0), t), ||v||_{[0,t)}\}.$$

Если почти для всех $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено неравенство

$$\dot{y}(t) \leqslant -\alpha(y(t)) + v(t),$$

то для всех $t \in \mathbb{R}_+$ верна оценка

$$y(t) \leqslant \beta_\alpha(y(0), t) + \int\limits_0^t 2v(s)\, ds.$$

В [6] показано, что для любой функции $\beta \in \mathcal{KL}$ существуют функции $\chi, \sigma \in \mathcal{K}_\infty$ такие, что $\beta(s,t) \leqslant \chi(s)\sigma(e^{-t})$ для всех $s, t \in \mathbb{R}_+$. Приведенные леммы 6.1, 6.2 полезны при анализе устойчивости нелинейных динамических систем с использованием метода функций Ляпунова.

6.2. Решения динамических систем

Рассмотрим нелинейную систему

$$\dot{x} = f(x,u), \quad y = h(x), \tag{6.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ – вектора состояния, входа и выхода соответственно; f – непрерывная и локально липшицевая векторная функция равномерно по u (т.е. для любых компактных подмножеств $X \subset \mathbb{R}^n$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ существует константа $L > 0$ такая, что $|f(x,u) - f(x',u)| \leqslant L|x - x'|$ для всех $x, x' \in X$ и $u \in \Omega$); h – непрерывная векторная функция; $h(0) = 0$, $f(0,0) = 0$. Для начальных условий $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и входа $u \in M_{\mathbb{R}^m}$ пусть $x(t, x_0, u)$ – единственное максимальное решение системы (1) (обозначение $x(t)$ будет использоваться, если все остальные аргументы решения ясны из контекста; $y(t, x_0, u) = h[x(t, x_0, u)]$) определен на конечном интервале $[0, T)$. Множество A является инвариантным для системы (6.1) с нулевым входом, если для всех $x_0 \in A$ выполнено $T = +\infty$ и $x(t, x_0, 0) \in A$, $t \geqslant 0$. Множество A является равномерно инвариантным для системы (6.1) с входами $u \in M_\Omega$, если для всех $x_0 \in A$ и $u \in M_\Omega$ выполнено $T = +\infty$ и $x(t, x_0, u) \in A$, $t \geqslant 0$. Если $T = +\infty$ для всех начальных условий $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $u \in M_{\mathbb{R}^m}$, то будем говорить, что система наделена свойством продолжимости решений. Система (6.1) обладает свойством наблюдаемости неограниченности (НН) [75], если для каждого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и входа $u \in M_{\mathbb{R}^m}$ таких, что $T < +\infty$, необходимо следует:

$$\limsup_{t \to T} |y(t, x_0, u)| = +\infty.$$

Другими словами, используя выход y, можно наблюдать любую неограниченность вектора состояния. Если выход системы ограничен, то свойство НН по этому выходу означает для системы свойство продолжимости решений. Любая система наделена свойством НН по выходу $h(x) = x$. Подчеркнем, что в общем случае свойство НН не означает свойство продолжимости решений системы. Необходимые и достаточные условия свойств продолжимости решений и НН представлены в [75]. Приведем здесь некоторые из них.

Теорема 6.1. Система (6.1) *наделена свойством продолжимости решений тогда и только тогда, когда существует гладкая и радиально неограниченная функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $u \in \mathbb{R}^m$ оценке*

$$DV(x)f(x,u) \leqslant V(x) + \sigma(|u|), \quad \sigma \in \mathcal{K}_\infty.$$

Если $u \in \Omega$, то вывод теоремы 6.1 верен при выполнении для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $u \in \Omega$ неравенства

$$DV(x)f(x,u) \leqslant V(x).$$

Система (6.1) *наделена свойством НН тогда и только тогда, когда существует гладкая и радиально неограниченная функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, соответствующая для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $u \in \mathbb{R}^m$ оценке*

$$DV(x)f(x,u) \leqslant V(x) + \sigma_1(|h(x)|) + \sigma_2(|u|), \quad \sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{K}_\infty.$$

Лемма 6.3. Система (6.1) *наделена свойством продолжимости решений тогда и только тогда, когда существуют функции χ_1, χ_2, χ_3 из класса $\mathcal{K}$ и $c \in \mathbb{R}_+$ такие, что для всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $u \in M_{\mathbb{R}^m}$ выполнено*

$$|x(t,x_0,u)| \leqslant \chi_1(t) + \chi_2(|x_0|) + \chi_3(||u||) + c, \quad t \geqslant 0.$$

Если $u \in \Omega$, то вывод леммы 6.3 сохраняется при выполнении для всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $u \in M_\Omega$ оценки

$$|x(t,x_0,u)| \leqslant \chi_1(t) + \chi_2(|x_0|) + c, \quad t \geqslant 0.$$

Система (6.1) *наделена свойством НН тогда и только тогда, когда существуют функции χ_1, χ_2, χ_3, χ_4 из класса $\mathcal{K}$ и $c \in \mathbb{R}_+$ такие, что для всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $u \in M_{\mathbb{R}^m}$ и всех $t \in [\,0,T)$ выполнено*

$$|x(t,x_0,u)| \leqslant \chi_1(t) + \chi_2(|x_0|) + \chi_3(||u||_{[0,t)}) + \chi_3(||y||_{[0,t)}) + c.$$

Говорят, что система (6.1) наделена свойством ограниченный-вход-ограниченное-состояние (ОВОС), если для всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $u \in M_{\mathbb{R}^m}$ выполняется неравенство

$$|x(t,x_0,u)| \leqslant \max\{\vartheta(|x_0|), \vartheta(||u||)\}, \quad t \geqslant 0$$

для некоторой $\vartheta \in \mathcal{K}$. Система (6.1) наделена свойством глобальной устойчивости по модулю выхода (ГУМВ), если

$$|x(t,x_0,u)| \geqslant \nu(|y(t,x_0,u)|), \quad t \in [0,\tilde{T}) \Rightarrow$$

$$|x(t,x_0,u)| \leqslant \max\{\mu(|x_0|), \mu(||u||_{[0,\tilde{T})})\}, \quad t \in [0,\tilde{T}),$$

где функции $\nu \in \mathcal{K}_\infty$, $\mu \in \mathcal{K}$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $u \in M_{\mathbb{R}^m}$, $\tilde{T} < T$. Если $u \in M_\Omega$, то компонента $\mu(||u||_{[0,\tilde{T})})$ может быть пропущена в последнем неравенстве. Дополнительно, если множество $Z = \{x : \ h(x) = 0\,\}$ компактно, то система наделена свойством ГУМВ.

Предложение 6.1. Для системы (6.1) *верны следующие свойства:*

1. *ОВОС $\Rightarrow$ ГУМВ $\Rightarrow$ НН;*
2. *ОВОС $\Rightarrow$ ГУМВ и ограниченность выхода для всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $u \in M_{\mathbb{R}^m}$:*

$$|y(t,x_0,u)| \leqslant \max\{\varsigma(|x_0|), \varsigma(||u||)\}, \quad t \geqslant 0, \ \varsigma \in \mathcal{K}.$$

6.3. Устойчивость по Ляпунову относительно множества

Материал этого подраздела базируется на результатах теории, сформулированной в [76] для системы (6.1) с $u \in M_\Omega$. Пусть для системы (6.1) задано замкнутое инвариантное множество A (не обязательно компактное), удовлетворяющее техническому свойству, выполненному для большинства приложений:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{|x|_A\} = +\infty.$$

Определение 6.1. *Система* (6.1) *называется равномерно глобально асимптотически устойчивой* (*РГАУ*) *относительно множества A, если она наделена свойством продолжимости решений и верны следующие свойства:*

1. *Равномерная устойчивость. Существует функция $\varphi \in \mathcal{K}_\infty$ такая, что для всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $u \in M_\Omega$ выполнено*

$$|x(t, x_0, u)|_A \leqslant \varphi(|x_0|_A), \quad t \geqslant 0.$$

2. *Равномерная аттрактивность. Для любых $\varepsilon, r > 0$ существует $T_{\varepsilon,r} > 0$ такое, что для каждого $u \in M_\Omega$ и $|x_0|_A < r$ для $t \geqslant T_{\varepsilon,r}$ верно:*

$$|x(t, x_0, u)|_A < \varepsilon.$$

Согласно следующему утверждению равномерная устойчивость и аттрактивность системы (6.1) эквивалентны полезной оценке сверху на решения системы.

Предложение 6.2. *Система* (6.1) *является РГАУ относительно множества A тогда и только тогда, когда она наделена свойством продолжимости решений и существует функция $\beta \in \mathcal{KL}$ такая, что для всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $u \in M_\Omega$ выполнено*

$$|x(t, x_0, u)|_A \leqslant \beta(|x_0|_A, t), \quad t \geqslant 0.$$

Формулировка свойства РГАУ, предложенная в предложении 6.2, в виде существования функции из класса $\mathcal{KL}$ удобна для практического использования. Например, для линейной системы (6.1) $\dot{x} = A\,x$, где матрица A имеет все собственные числа с отрицательной вещественной частью, множество $A = \{0\}$ и $\beta(|x_0|, t) = a|x_0|e^{-bt}$ для некоторых постоянных $a > 0$ и $b > 0$. Другими словами, функции из класса $\mathcal{KL}$ позволяют обобщить экспоненциальные оценки, используемые в теории линейных систем, на решения нелинейных систем, где характер убывания решения может в общем случае отличаться от экспоненциального.

Определение 6.2. *Гладкая на $\mathbb{R}^n \backslash A$ функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ называется функцией Ляпунова относительно множества A, если она удовлетворяет условиям:*

1. *Существуют $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$ такие, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$*

$$\alpha_1(|x|_A) \leqslant V(x) \leqslant \alpha_2(|x|_A);$$

2. *Существует непрерывная и положительно определенная функция $\alpha_3 : \mathbb{R}_+ \to \to \mathbb{R}_+$ такая, что для всех $x \in \mathbb{R}^n \backslash A$ и $u \in \Omega$*

$$DV(x)f(x, u) \leqslant -\alpha_3(|x|_A).$$

Свойство гладкости функции $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ на $\mathbb{R}^n \backslash A$ надо понимать, как гладкость функции V для всех $x \in \mathbb{R}^n \backslash A$, тогда как для $x \in A$ выполнено $V(x) = 0$. Неравенства п.1 этого определения при $A = \{0\}$ означают, что функция V радиально неограниченна и положительно определена.

Т е о р е м а 6.2. *Пусть система* (6.1) *наделена свойством продолжимости решений. Система является РГАУ относительно множества A тогда и только тогда, когда существует гладкая функция Ляпунова относительно множества A. Если множество A компактно, то требование наличия свойства продолжимости решений может быть опущено.*

Для случая $A = \{0\}$, $u \in M_{\{0\}}$ теорема 6.2 совпадает с результатами классической теории Ляпунова [16] и является развитием этой теории на проблему равномерной устойчивости относительно множества. Существуют другие результаты, развивающие классическую теорию устойчивости для положений равновесия на устойчивость по части переменных или выходу [57, 77–79]. Для иллюстрации связи теоремы 6.2 с этим направлением теории устойчивости динамических систем определим $Z = \{\, x : \ h(x) = 0 \,\}$ – непустое замкнутое инвариантное множество системы (6.1). Пусть существуют некоторые функции $\iota_1, \iota_2 \in \mathcal{K}_\infty$ такие, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено соотношение

$$\iota_1(|x|_Z) \leqslant h(x) \leqslant \iota_2(|x|_Z). \tag{6.2}$$

В дальнейшем будем предполагать, что подобное соотношение всегда удовлетворено. Оно означает, что ограниченность и стремление к нулю функции выхода вызывает соответствующую ограниченность и стремление к нулю расстояния от изображающей точки траектории до множества Z (и наоборот). Тогда свойство устойчивости относительно множества Z в смысле определения 6.1 и свойство устойчивости по выходу y из [57] будут эквивалентны. Если функция выхода выбрана специальной формы $h(x) = x_1$, где $x = [x_1 \ x_2\,]$, то становится очевидной связь представленных здесь результатов и теории устойчивости по части переменных из [77, 79]. Целесообразно отметить, что в книгах [57, 77, 79] представлены достаточные условия для различных свойств устойчивости не только в терминах существования у системы функции Ляпунова из определения 6.2, но и упрощенные критерии устойчивости для ряда специальных случаев. Приведем еще одно полезное свойство.

Л е м м а 6.4. *Система* (6.1) *является РГАУ по отношению к компактному множеству A при нулевом входе и тогда и только тогда, когда существуют гладкая полурадиально неограниченная функция* $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, *функция* $\sigma \in \mathcal{K}$ *и непрерывная положительно определенная функция* $\rho : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *такие, что для всех* $x \in \mathbb{R}^n$ *и* $u \in \mathbb{R}^m$

$$DW(x)f(x,u) \leqslant -\rho(|x|_A) + \sigma(|u|).$$

Напомним, что функция $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ называется полурадиально (semi-proper) неограниченной, если существует функция $\pi \in \mathcal{K}$ и радиально неограниченная положительно определенная функция $W_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ такие, что $W = \pi \circ W_0$. Введенный комплекс свойств позволяет анализировать устойчивость нелинейных динамических систем относительно множества равномерно по неизвестным квазипостоянным параметрам и в присутствии внешних возмущений.

6.4. Пассивность динамических систем

Заметим, что существуют различные определения свойства диссипативности динамических систем [80]. В данной работе под диссипативностью понимаем следующее [17, 18, 57, 81].

О п р е д е л е н и е 6.3. *Система* (6.1) *называется диссипативной с непрерывной функцией* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, *если* $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}^n$, $u \in M_{\mathbb{R}^m}$, $t \geqslant 0$ *верно неравенство*

$$V(x(x_0,u,t)) \leqslant V(x_0) + \int\limits_0^t \varpi\,(x(\tau), y(\tau), u(\tau))\, d\,\tau. \tag{6.3}$$

Функции ϖ и V называются функциями расхода и запаса соответственно.

Для непрерывно дифференцируемой функции запаса неравенство (6.3) может быть записано в упрощенном виде:

$$\dot{V}(x\,,u,t) \leqslant \varpi\,(x\,(t),u(t),y(t))\,.$$

Самыми известными примерами диссипативных систем являются пассивные системы.

Определение 6.4. *Система* (6.1) *называется пассивной с непрерывной функцией* $V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_+$, *если для* $\forall\ x_0\in\mathbb{R}^n$, $u\in M_{\mathbb{R}^m}$, $t\geqslant 0$ *верно неравенство* (6.3) *для функции расхода* $\varpi(x,y,u)=y^{\mathrm{T}}u-\beta(x)$, *где* β *– неотрицательная непрерывная функция. Система называется пассивной с известной скоростью диссипации* β, *если в* (6.3) *можно использовать знак равенства. Система называется пассивной без потерь, если в* (6.3) *можно использовать знак равенства и* $\beta(\cdot)\equiv 0$. *Система* (6.1) *называется строго пассивной с непрерывной функцией* $V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_+$, *если для* $\forall\ x_0\in\mathbb{R}^n$, $u\in M_{\mathbb{R}^m}$, $t\geqslant 0$ *верно неравенство* (6.3) *для функции расхода* $\varpi(x,y,u)=y^{\mathrm{T}}u-\beta(x)$, *где* β *– положительно определенная непрерывная функция.*

Если $u(t)\equiv 0$, $t\geqslant 0$ и функция запаса положительно определенная, то пассивная система наделена свойством устойчивости по Ляпунову, а строго пассивная система является асимптотически устойчивой. Лемма Якубовича–Калмана–Попова устанавливает формулу определения (строго) пассивного выхода системы

$$\dot{x}=f(x)+G(x)u$$

по функции Ляпунова V (асимптотически) устойчивой системы при нулевом входе

$$h(x)=L_GV(x).$$

Функция выхода задает множество нуль-динамики $Z=\{x\in\mathbb{R}^n: h(x)=0\}$ – множество всех траекторий системы при тождественно равном нулю выходе. Пассивные и строго пассивные системы имеют устойчивую и асимптотически устойчивую динамику на этом множестве.

7. Заключение

В данном обзоре собраны некоторые базовые результаты теории устойчивых по входу-состоянию систем. Эта теория позволяет исследовать робастность свойства внутренней устойчивости системы (устойчивости по состоянию) по отношению к поведению ее выхода и входа. Разнообразие введенных свойств и глубина их проработки позволяют автору [3] говорить о новой концепции (или философии) синтеза и анализа нелинейных систем управления. Публикации, посвященные развитию и применению данной концепции, позволяют согласиться с [3], подчеркивая несомненную важность рассматриваемых результатов в современной теории нелинейного управления.

К сожалению, формат обзорной статьи не позволяет подробно рассмотреть весь спектр результатов, полученных в рамках этой теории за последние двадцать лет. Например, в обзор не вошли результаты по развитию свойства УВС на гибридные системы и системы с переключениями [82–89]. В качестве других интересных результатов, не вошедших в обзор, отметим следующие. Свойство УВС для системы (2.3) было расширено в [90] на случай, когда влияние на устойчивость оказывают производные вектора входа, т.е. когда для любого (k раз дифференцируемого) входа $u\in M_{\mathbb{R}^m}$ и $x_0\in\mathbb{R}^n$ существуют функции $\beta\in\mathcal{KL}$, $\gamma\in\mathcal{K}$ такие, что для $\forall\ t\geqslant 0$

$$|x(t,x_0,u)|\leqslant\beta(|x_0|,t)+\sum\nolimits_{i=0}^{k}\gamma(||u^{(i)}||).$$

Подчеркнем, что в данном случае система (2.3) зависит в явном виде только от вектора u, но не от его производных. Существуют системы, не являющиеся УВС, но отвечающие свойству УВС по отношению ко входу и его производным [90]. Развитие свойства УВС на нелинейные системы с зависящими в явном виде от времени правыми частями представлено в [91], обсуждение соответствующих функций Ляпунова дано в [92] (см. также [5]). Развитие свойства УВС на дискретные системы вида

$$x_{t+1} = f(x_t, u_t), \quad x_t \in \mathbb{R}^n, \quad u_t \in \mathbb{R}^m, \quad f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n, \tag{7.1}$$

где $t \geqslant 0$ – дискретное время, приведено в [93–95] (оценка из определения 2.1 сохраняет свое значение для системы (7.1)). Свойства каскадного соединения такого типа систем рассмотрены в [96]. В [97] показано, что свойство ИУВС для системы (7.1) $\alpha(|x(t, x_0, u)|) \leqslant \beta(|x_0|, t) + \sum_{i=0}^{t-1} \sigma(|u_i|)$ $\forall\ t \geqslant 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $\alpha, \sigma \in \mathcal{K}$, $\beta \in \mathcal{KL}$ эквивалентно свойству глобальной асимптотической устойчивости системы (7.1). Подчеркнем, что для непрерывных систем (2.4) или (2.3) подобное утверждение в общем случае не верно! Фактически, в непрерывном случае требуются дополнительные условия, аналогичные введенным в лемме 5.1. Формулировки свойства УВС для систем со стохастическими шумами, сформулированные в вероятностном смысле, предложены в [98–100]. В [101] введена в рассмотрение концепция устойчивости автономных нелинейных систем по отношению к почти всем начальным условиям, допускающая траектории с начальными условиями, принадлежащими множеству меры нуль, не стремящимися к началу координат. Данное свойство оказывается полезным при исследовании систем с неединственным положением равновесия. В [102] предложено развитие свойства УВС на такой тип устойчивости. Условия возникновения устойчивости по входу-состоянию в усредненных и сингулярно возмущенных системах получены в [103, 104]. Существуют публикации, посвященные проблемам УВС стабилизации различных канонических моделей нелинейных систем [28, 59] (см. также [2]), вынесенные за рамки данного обзора.

8. Список использованных сокращений

Для удобства читателей приводим таблицу, содержащую все термины, введенные в этой работе, включая их английский перевод и их устоявшиеся сокращения, часто используемые в англоязычной литературе.

УВС	устойчивость от входа к состоянию (по входу-состоянию)	input to state stability	ISS
ИУВС	интегральная устойчивость от входа к вектору состояния	integral input to state stability	iISS
УВВ	устойчивой от входа к выходу (по входу-выходу)	input to output stability	IOS
0-ЛУ	0-локальная устойчивость	0-local stability	0-LS
АКУ	асимптотический коэффициент усиления	asymptotic gain	AG
РАКУ	равномерный асимптотический коэффициент усиления	uniform asymptotic gain	UAG
ПС	предельное свойство	limit property	LIM
	робастная устойчивость	robust stability	
	функция границы устойчивости	stability margin	
ДУВС	динамическая устойчивость от входа к состоянию	input to state dynamical stability	ISDS

ЛУВС	локальная устойчивость от входа к состоянию	local input to state stability	LISS
ВСУ	устойчивость от выхода к состоянию (по выходу-состоянию)	output to state stability	OSS
ВВСУ	устойчивость от входа/выхода к состоянию	input/output to state stability	IOSS
НН	наблюдаемость неограниченности	unboundedness observability	UO
	детектируемость в нуле (по выходу)	zero-state detectability (with respect to output)	
ЛУВ	лагранжева устойчивость по выходу	output-Lagrange stable	OL
ЛУВВ	устойчивость по Лагранжу от входа к выходу	output-Lagrange input to output stable	OLIOS
УВВНС	устойчивой от входа к выходу независимо от вектора состояния	state-independent input to output stable	SIIOS
РУВ	робастная устойчивость по выходу	robustly output stable	ROS
ОВОС	ограниченный-вход-ограниченное- состояние	bounded input bounded state	BIBS
РГАУ	равномерно глобально асимптотически устойчивой	uniform global asymptotic stability	UGAS
УФЛ	управляющая функция Ляпунова	control Lyapunov function	CLF
ГУМВ	свойством глобальной устойчивости по модулю выхода	global stability modulo output	GSMO

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kokotović P., Arcak M.* Constructive nonlinear control: a historical perspective // Automatica J. IFAC. 2001. № 37(5). P. 637–662.
2. *Sontag E.D.* Input to state stability: basic concepts and results / Nonlinear and optimal control theory. V. 1932. Lecture Notes Math. Berlin: Springer, 2008. P. 163–220.
3. *Sontag E.D.* The ISS philosophy as a unifying framework for stability-like behavior / Nonlinear control in the year 2000. V. 259. Lecture Notes Control Inform. Sci. London: Springer, 2001. P. 443–467.
4. *Doyle J., Francis B., Tannenbaum A.* Feedback Control Systems. Mac Millan Publishing Co, 1992.
5. *Халил Х.К.* Нелинейные системы. М.: РХД, 2009.
6. *Sontag E.D.* Comments on integral variants of ISS // Syst. Control Lett. 1998. No. 34(1–2). P. 93–100.
7. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. СПб.: Лань, 1999.
8. *Sontag E.D.* Smooth stabilization implies coprime factorization // IEEE Trans. Automat. Control. 1989. No. 34(4). P. 435–443.
9. *Dashkovskiy S., Rüffer B.S., Wirth F.R.* Small gain theorems for large scale systems and construction of ISS Lyapunov functions // Accepted SIAM J. on Control and Optimization, available electronically: http://arxiv.org/pdf/0901.1842, 2009.
10. *Sontag E.D., Wang Y.* New characterizations of input-to-state stability // IEEE Trans. Automat. Control. 1996. No. 41(9), P. 1283–1294.
11. *Sontag E.D.* Further facts about input to state stabilization // IEEE Trans. Automat. Control, 1990. No. 35(4). P. 473–476.
12. *Sontag E.D., Wang Y.* On characterizations of the input-to-state stability property // Syst. Control Lett. 1995. No. 24(5). P. 351–359.
13. *Teel A.R.* Connections between Razumikhin-type theorems and the ISS nonlinear small gain theorem // IEEE Trans. Automat. Control. 1998. No. 43(7). P. 960–964.

14. *Karafyllis I., Jiang Z.-P.* A small-gain theorem for a wide class of feedback systems with control applications // SIAM J. Control Optim. 2007. No. 46(4). P. 1483–1517.

15. *Pepe P., Karafyllis I., Jiang Z.-P.* On the Liapunov-Krasovskii methodology for the ISS of systems described by coupled delay differential and difference equations // Automatica J. IFAC. 2008. No. 44(9). P. 2266–2273.

16. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. Харьков: Математическое общество Харькова, 1892.

17. *Полушин И.Г., Фрадков А.Л., Хилл Д.* Пассивность и пассификация в теории нелинейных систем // АиТ. 2000. № 3. С. 3–37.

18. *Willems J.C.* Dissipative dynamical systems. Part I: General theory // Arch. Rational Mechanics Anal. 1972. No. 45. P. 321—351.

19. *Grüne L.* Input-to-state dynamical stability and its Lyapunov function characterization // IEEE Trans. Automat. Control. 2002. No. 47(9). P. 1499–1504.

20. *Praly L., Wang Y.* Stabilization in spite of matched unmodeled dynamics and an equivalent definition of input-to-state stability // Math. Control Signals Syst. 1996. No. 9(1). P. 1–33.

21. *Sontag E.D., Teel A.* Changing supply functions in input/state stable systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1995. No. 40(8). P. 1476–1478.

22. *Malisoff M., Rifford L., Sontag E.D.* Global asymptotic controllability implies input-to-state stabilization // SIAM J. Control Optim. 2004. No. 42(6). P. 2221–2238.

23. *Angeli D., Sontag E.D., Wang Y.* A characterization of integral input-to-state stability // IEEE Trans. Automat. Control. 2000. No. 45(6). P. 1082–1097.

24. *Byrnes C.I., Isidori A., Willems J.C.* Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1991. No. 36(11). P. 1228–1240.

25. *Liberzon D., Sontag E.D., Wang Y.* On integral input to state stabilization // Proc. Amer. Control Conf., San Diego, USA. June 1999. P. 1598–1602.

26. *Angeli D., Sontag E.D., Wang Y.* Further equivalences and semiglobal versions of integral input to state stability // Dynam. Control. 2000. No. 10(2). P. 127–149.

27. *Grüne L.* Asymptotic behavior of dynamical and control systems under perturbation and discretization/ V. 1783. Lecture Notes Math. Berlin: Springer-Verlag, 2002.

28. *Sepulchre R., Janković M., Kokotović P.V.* Constructive nonlinear control / Communications and Control Engin. Ser. Berlin: Springer-Verlag, 1997.

29. *Sontag E.D., Wang Y.* Output-to-state stability and detectability of nonlinear systems // Syst. Control Lett. 1997. No. 29(5). P. 279–290.

30. *Polushin I.G.* On the output feedback robust stabilization of passive nonlinear systems // Proc. 39 IEEE Conf. Decision Control. Sydney, Australia, December 2000. P. 2934–2935.

31. *Isidori A.* Nonlinear control systems / Communications and Control Engin. Ser. 3rd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1995.

32. *Liberzon D., Morse A.S., Sontag E.D.* Output-input stability and minimum-phase nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2002. No. 47(3). P. 422–436.

33. *Sontag E.D., Wang Y.* A notion of input to output stability // Proc. Europ. Control Conf. Brussels, Belgium, CD-ROM file ECC958.pdf, July 1997.

34. *Hespanha J.P., Liberzon D., Angeli D., Sontag E.D.* Nonlinear norm-observability notions and stability of switched systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2005. No. 50(2). P. 154–168.

35. *Krichman M., Sontag E.D., Wang Y.* Input-output-to-state stability // SIAM J. Control Optim. 2001. No. 39(6). P. 1874–1928.

36. *Sontag E.D., Wang Y.* Notions of input to output stability // Syst. Control Lett. 1999. No. 38(4–5). P. 235–248.

37. *Sontag E.D., Wang Y.* Lyapunov characterizations of input to output stability // SIAM J. Control Optim. 2000. No. 39(1). P. 226–249.

38. *Ingalls B., Wang Y.* On input-to-output stability for systems not uniformly bounded // Proc. NOLCOS'01, Saint-Petersburg, Russia, July 2001.

39. *Angeli D., Ingalls B., Sontag E.D., Wang Y.* Separation principles for input-output and integral-input-to-state stability // SIAM J. Control Optim. 2004. No. 43(1). P. 256–276.

40. *Lin Y.D., Sontag E.D., Wang Y.* Input to state stabilizability for parametrized families of systems // Int. J. Robust Nonlinear Control. 1995. No. 5(3). P. 187–205.

41. *Sontag E.D., Wang Y.* Various results concerning set input-to-state stability // Proc. 34 IEEE Conf. Decision Control. New Orleans, USA, December 1995. P. 1330–1335.

42. *Sontag E.D., Wang Y.* On characterizations of input-to-state stability with respect to compact sets // Proc. IFAC NOLCOS'95. Tahoe City, USA, September 1995. P. 226–231.

43. *Jiang Z.-P., Teel A.R., Praly L.* Small-gain theorem for ISS systems and applications // Math. Control Signals Systems. 1994. No. 7(2). P. 95–120.

44. *Sontag E.D., Lin Y.* Stabilization with respect to noncompact sets : Lyapunov characterization and effect of bounded inputs // Proc. NOLCOS'92. Bordeaux, France, 1992.

45. *Efimov D.V., Fradkov A.L.* Input-to-output stabilization of nonlinear systems via backstepping // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2009. No. 19(6). P. 613–633.

46. *Jiang Z.-P., Mareels I.M.Y., Wang Y.* A Lyapunov formulation of the nonlinear small-gain theorem for interconnected ISS systems // Automatica J. IFAC. 1996. No. 32(8). P. 1211–1215.

47. *Ito H.* State-dependent scaling problems and stability of interconnected iISS and ISS systems // IEEE Trans. on Automat. Control. 2006. No. 51(10). P. 1626–1643.

48. *Dashkovskiy S., Rüffer B.S., Wirth F.R.* An ISS small gain theorem for general networks // Math. Control Signals Syst. 2007. No. 19(2). P. 93–122.

49. *Rüffer B.S.* Monotone inequalities, dynamical systems, and paths in the positive orthant of Euclidean n-space // Positivity. 2009. DOI:10.1007/s11117-009-0016-5.

50. *Dashkovskiy S., Rüffer B.S., Wirth F.R.* Applications of the general Lyapunov ISS small-gain theorem for networks // Proc. 47 IEEE Conf. Decision Control. Dec. 2008. P. 25–30.

51. *Dashkovskiy S., Rüffer B.* Local ISS of large-scale interconnections and estimates for stability regions // Syst. & Control Lett. 2010. № 59(3–4). P. 241–247.

52. *Arcak M., Teel A.* Input-to-state stability for a class of Lurie systems // Automatica J. IFAC. 2002. No. 38(11). P. 1945–1949.

53. *Воронов А.А.* Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. М.: Наука, 1979.

54. *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления. Уч. пос. М.: Наука, 1986.

55. *Цыпкин Я.З.* Основы теории автоматических систем. М.: Наука, 1977.

56. *Ефимов Д.В.* Робастное и адаптивное управление нелинейными колебаниями. СПб.: Наука, 2005.

57. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. Анализ и синтез нелинейных систем. СПб: Наука, 2000.

58. *Efimov D.V.* Passivity and input-to-state stability of nonlinear systems // Proc. 5th IFAC Sympos. on Robust Control Design. Toulouse, France, July 2006.

59. *Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P.V.* Nonlinear and Adaptive Control Design. N.Y.: Wiley & Sons, Inc., 1995.

60. *Колесников А.А.* Синергетическая теория управления. М.: Энергоатомиздат, 1994.

61. *Дружинина М.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Методы адаптивного управления нелинейными объектами по выходу // АиТ. 1996. № 2. С. 3–33.

62. *Efimov D.V., Fradkov A.L.* Adaptive input-to-output stabilization of nonlinear systems // Int. J. Adaptive Control and Signal Processing. 2008. No. 22(10). P. 949–967.
63. *Artstein Z.* Stabilization with relaxed controls // Nonlinear Anal. 1983. No. 7(11). P. 1163–1173.
64. *Sontag E.D.* A "universal" construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization // Syst. Control Lett. 1989. No. 13(2). P. 117–123.
65. *Teel A., Praly L.* On assigning the derivative of disturbance attenuation clf // Proc. 37th IEEE CDC, Tampa. Florida, USA, December 1998. P. 2497–2502.
66. *Efimov D.V.* A condition of clf existence for affine systems // Proc. 41 IEEE Conf. Decision Control. Las Vegas, USA, December 2002. P. 1882–1887.
67. *Efimov D.V.* Universal formula for output asymptotic stabilization // Proc. 15 IFAC World Congress 2002, T-We-M 07 4. Barselona, Spain, July 2002.
68. *Krstić M., Li Z.-H.* Inverse optimal design of input-to-state stabilizing nonlinear controllers // IEEE Trans. Automat. Control. 1998. No. 43(3). P. 336–350.
69. *Liberzon D., Sontag E.D., Wang Y.* Universal construction of feedback laws achieving ISS and integral-ISS disturbance attenuation // Syst. Control Lett. 2002. No. 46(2). P. 111–127.
70. *Alessandri A.* Observer design for nonlinear systems by using input-to-state stability // Proc. 43 IEEE Conf. Decision Control. Bahamas, Dec. 2004. P. 3892–3897.
71. *Барбашин Е. А., Красовский Н. Н.* О существовании функции Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом // Прикл. мат. и механика. 1954. № 18. С. 345–350.
72. *Чаплыгин С.А.* Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1948.
73. *Lakshmikantham V., Matrosov V.M., Sivasundaram S.* Vector Lyapunov functions and stability analysis of nonlinear systems / V. 63. Math. Appl. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1991.
74. *Леонов Г. А.* Семейства трансверсальных кривых для двумерных систем дифференциальных уравнений // Вест. СПбГУ. Сер. 1. 2006. № 4. С. 48–78.
75. *Angeli D., Sontag E.D.* Forward completeness, unboundedness observability, and their Lyapunov characterizations // Syst. Control Lett. 1999. No. 38(4–5). P. 209–217.
76. *Lin Y., Sontag E.D., Wang Y.* A smooth converse Lyapunov theorem for robust stability // SIAM J. Control Optim. 1996. No. 34(1). P. 124–160.
77. *Воротников В.И., Румянцев В.В.* Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М.: Научный мир, 2001.
78. *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным положением равновесия. М.: Наука, 1978.
79. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движений по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987.
80. *Leonov G.A., Burkin I.M., Shepeljavyi A.I.* Frequency methods in oscillation theory. V. 357. Math. Appl. / Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1996. Translated from the 1992 Russian original and revised by the authors.
81. *Hill D.J., Moylan P.J.* Dissipative dynamical systems: basic input-output and state properties // J. Franklin Inst. 1980. No. 309(5). P. 327–357.
82. *Cai C., Teel A.R.* Results on input-to-state stability for hybrid systems // Proc. 44 IEEE Conf. Decision Control, and Europ. Control Conf. Seville, Spain, December 2005. P. 5403–5408.
83. *Cai C., Teel A.R.* Characterizations of input-to-state stability for hybrid systems // Syst. & Control Lett. 2009. No. 58(1). P. 47–53.
84. *Brockett R.W., Liberzon D.* Quantized feedback stabilization of linear systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2000. No. 45(7). P. 1279–1289.

85. *Hespanha J.P., Liberzon D., Morse A.S.* Supervision of integral-input-to-state stabilizing controllers // Automatica J. IFAC. 2002. No. 38(8). P. 1327–1335.

86. *Liberzon D.* Switching in systems and control / Systems & Control: Foundations & Applications. Boston: Birkhäuser Boston Inc., 2003.

87. *Mancilla-Aguilar J.L., García R.A.* On converse Lyapunov theorems for ISS and iISS switched nonlinear systems // Syst. Control Lett. 2001. No. 42(1). P. 47–53.

88. *Vu L., Chatterjee D., Liberzon D.* Input-to-state stability of switched systems and switching adaptive control // Automatica J. IFAC. 2007. No. 43(4). P. 639–646.

89. *Xie W., Wen C., Li Z.* Input-to-state stabilization of switched nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2001. No. 46(7). P. 1111–1116.

90. *Angeli D., Sontag E.D., Wang Y.* Input-to-state stability with respect to inputs and their derivatives // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2003. No. 13(11). P. 1035–1056.

91. *Tsinias J., Karafyllis I.* ISS property for time-varying systems and application to partial-static feedback stabilization and asymptotic tracking // IEEE Trans. Automat. Control. 1999. No. 44(11). P. 2179–2184.

92. *Malisoff M., Mazenc F.* Further remarks on strict input-to-state stable Lyapunov functions for time-varying systems // Automatica J. IFAC. 2005. No. 41(11). P. 1973–1978.

93. *Kazakos D., Tsinias J.* The input to state stability condition and global stabilization of discrete-time systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1994. No. 39(10). P. 2111–2113.

94. *Jiang Z.-P., Wang Y.* Input-to-state stability for discrete-time nonlinear systems // Automatica J. IFAC. 2001. No. 37(6). P. 857–869.

95. *Jiang Z.-P., Wang Y.* A converse Lyapunov theorem for discrete-time systems with disturbances // Syst. Control Lett. 2002. No. 45(1). P. 49–58.

96. *Loria A., Nešić D.* Stability of time-varying discrete-time cascades // Proc. 15 IFAC World Congress. Barcelona, Spain, June 2002.

97. *Angeli D.* Intrinsic robustness of global asymptotic stability // Syst. Control Lett. 1999. No. 38(4–5). P. 297–307.

98. *Tsinias J.* Stochastic input-to-state stability and applications to global feedback stabilization // Int. J. Control. 1998. No. 71(5). P. 907–930.

99. *Deng H., Krstić M.* Output-feedback stabilization of stochastic nonlinear systems driven by noise of unknown covariance // Syst. Control Lett. 2000. No. 39(3). P. 173–182.

100. *Deng H., Krstić M., Williams R.J.* Stabilization of stochastic nonlinear systems driven by noise of unknown covariance // IEEE Trans. Automat. Control. 2001. No. 46(8). P. 1237–1253.

101. *Rantzer A.* A dual to Lyapunov's stability theorem // Syst. Control Lett. 2001. No. 42(3). P. 161–168.

102. *Angeli D.* An almost global notion of input-to-state stability // IEEE Trans. Automat. Control. 2004. No. 49(6). P. 866–874.

103. *Christofides P.D., Teel A.R.* Singular perturbations and input-to-state stability // IEEE Trans. Automat. Control. 1996. No. 41(11). P. 1645–1650.

104. *Nešić D., Teel A.R.* Input-to-state stability for nonlinear time-varying systems via averaging // Math. Control Signals Syst., 2001. No. 14(3). P. 257–280.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т. Поляком.

Поступила в редакцию 16.03.2010