УДК 62-50

А.А. Бобцов
(Санкт-Петербургский Государственный Институт Точной
Механики и Оптики (Технический университет))

АЛГОРИТМ РОБАСТНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННЫМ ОБЪЕКТОМ БЕЗ ИЗМЕРЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ РЕГУЛИРУЕМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ[1]

Предложена схема робастного управления неопределенным объектом без измерения производных регулируемой переменной (выхода объекта управления), обеспечивающая при заданных в статье допущениях на объект управления, ограниченность регулируемой переменной и сходимость ее к некоторому ограниченному инвариантному множеству. Процедура синтеза базируется на известном подходе Морза, который в литературе получил название «алгоритм адаптации высокого порядка». В отличие от алгоритма адаптации высокого порядка, предлагаемая схема робастного управления позволяет синтезировать менее громоздкие по размерности регуляторы. В статье приведены результаты компьютерного моделирования, иллюстрирующие работоспособность предлагаемой схемы управления.

1. Введение

Задача управления по выходу без измерения его производных имеет большое теоретическое и прикладное значение. На сегодняшний день в

[1] Работа поддержана грантом на проведение молодыми учеными научных исследований в ведущих научно-педагогических коллективах вузов и научных организаций Минобразования России и Комитетом по науке и высшей школе Санкт-Петербурга (шифр гранта: PD02-2.8-53), а также Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 02-01-06176-мас).

классе задач управления по выходной переменной получено множество решений, однако, построение простых в реализации и не громоздких по размерности алгоритмов до сих пор является актуальным.

Данная работа представляет собой развитие известных результатов Морза [1], которые в литературе получили распространение под названием алгоритмов адаптации высокого порядка, а также его робастной и нелинейной робастной модификаций, разработанных Никифоровым и опубликованных, соответственно в работах [2] и [3]. Расширяя модельные допущения представленные в [1-3], в данной статье предлагается новая схема управления по выходу неопределенным объектом, представленным в канонической форме известной из задач адаптивного управления с эталонной моделью [4], задач абсолютной устойчивости [5], а также задач стабилизации нелинейных систем с нелинейностями, приводимыми к входу по управлению [6].

В данной статье показано, что использование схема робастного управления проста в реализации по сравнению с алгоритмом адаптации высокого порядка [1] и позволяет при некоторых допущениях относительно объекта управления значительно понизить размерность регулятора в отличие от робастной модификации [2] и нелинейной робастной модификации [3] алгоритма адаптации высокого порядка.

2. Постановка задачи

Рассмотрим неопределенную систему вида [1-4]

(1) $$\dot{x} = Ax + b\omega(y,t)^T\theta + bu,$$

(2) $$y = c^T x,$$

где $x = x(t) \in R^n$ – вектор переменных состояния; $y \in R$ – регулируемая переменная; $u \in R$ – сигнал управления; матрица A – гурвицева (т.е. имеет собственные числа с отрицательной вещественной частью) или имеет один нулевой корень; $\omega(y,t) \in R^q$ – известная функция возбуждения (регрессор); $\theta \in R^q$ – вектор неизвестных постоянных параметров.

Используя стандартную процедуру перехода от модели "вход-состояние-выход", преобразуем систему (1), (2) к виду "вход-выход". Обозначим через $p = d/dt$ – оператор дифференцирования, тогда уравнение (1) примет вид

$$px = Ax + b\omega(y,t)^T\theta + bu,$$

откуда

$$x = (pI - A)^{-1}b[\omega(y,t)^T\theta + u],$$

где I – единичная матрица.

Подставляя последнее выражение в уравнение (2), получаем

$$y = c^T(pI - A)^{-1}b[\omega(y,t)^T\theta + u].$$

Обозначив $\dfrac{B(p)}{A(p)} = c^T(pI - A)^{-1}b$, запишем модель "вход-состояние-выход" (1), (2) в форме "вход-выход"

(3) $$y(t) = \frac{B(p)}{A(p)}\left[\omega(y,t)^T\theta + u\right] = H(p)\left[\omega(y,t)^T\theta + u\right],$$

где $B(p) = b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \ldots + b_0$ (коэффициент $b_m > 0$) и $A(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_0$.

Следует отметить, что модели вида (1)-(3) могут быть получены из задач адаптивного управления с эталонной моделью (см. обзор [4]), в которых в качестве элементов функции возбуждения $\omega(y,t)$ выступают отфильтрованные значения выходной переменной и управляющего воздействия. Также подобные модели можно встретить в задачах абсолютной устойчивости (см., например, [5]) и в задачах стабилизации нелинейных систем с неопределенными нелинейностями, приводимыми к входу по управлению (см., например [6]).

Прежде чем приступать к формализации цели управления, сделаем ряд допущений.

Допущение 1. Будем полагать, что полиномы $B(p)$ и $A(p)$ имеют размерность m и n, соответственно и $B(p)$ - гурвицев. Также будем рассматривать наиболее сложный случай, когда $n-m \geq 3$. Случай когда для строго реализуемой передаточной функции $H(p)$ относительная степень $\rho = n-m \leq 2$ не представляет принципиальной трудности и для реализации закона управления достаточно воспользоваться алгоритмом адаптации высокого порядка [1].

Допущение 2. Относительно вектор-функции θ, известно положительное число D, такое что

(4) $$|\theta| \leq D,$$

где $|\theta| = \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots + \theta_q^2}$.

Допущение 3. Для случая, когда полином $A(p)$ имеет нулевой корень, будем полагать, что математическая структура объекта управления (1)-(3), порождающая нулевой корень (т.е. элементарное звено интегратор) имеет нулевое начальное значение.

Полагая, что измерениям доступна только выходная переменная $y(t)$ (но не ее производные), с учетом указанных допущений сформулируем цель управления, как решение задачи синтеза алгоритма, обеспечивающего при любых начальных состояниях объекта, выполнение условия

(5) $$|y(t)| \leq \varepsilon \text{ для некоторого } t \geq t_1,$$

где ε - любое произвольно малое число, которое может быть задано разработчиком системы управления.

3. Синтез алгоритма управления

Повторяя математические выкладки, представленные в работах [1-3], сведем модель (1), (2) к дифференциальному уравнению первого порядка. Для этого выберем передаточную функцию $W(p)$, удовлетворяющую равенству

$$W(p) = (p+\alpha)H(p) = \frac{(p+\alpha)B(p)}{A(p)},$$

где α - положительная константа и относительная степень $\rho = n - m - 1$. Так как

$$H(p) = \frac{1}{p+\alpha} W(p),$$

то модель (3) может быть переписана в виде

$$y = \frac{1}{p+\alpha}\left[\varpi^T\theta + \bar{u}\right] + \delta \tag{6}$$

или

$$\dot{y} = -\alpha\, y + \varpi^T\theta + \bar{u} + \bar{\delta}, \tag{7}$$

где $\delta(t)$ - экспоненциально затухающая функция времени, вызванная ненулевыми начальными условиями; $\bar{\delta} = \dot{\delta} + \alpha\delta$ - экспоненциально затухает; вектор-функция $\varpi = W(p)\omega$ и каждая компонента ϖ находится как $\varpi_i = W(p)\omega_i$ для всех $i = \overline{1,q}$; сигнал $\bar{u}$ определяется в виде

$$\bar{u} = W(p)u = \frac{(p+\alpha)B(p)}{A(p)}u. \tag{8}$$

Введем новую переменную

$$\varphi = \varpi^T\theta + \bar{\delta}, \tag{9}$$

тогда модель (7) примет вид

$$\dot{y} = -\alpha\, y + \varphi + \bar{u}. \tag{10}$$

Выберем $\overline{u}$ следующим образом

(11) $$\overline{u} = -\hat{\varphi},$$

где $\hat{\varphi}$ - оценка функции φ, обеспечивающая малые значения невязки $\tilde{\varphi} = \varphi - \hat{\varphi}$.

Тогда, в силу уравнения (8), закон управления $u(t)$ примет вид

(12) $$(p+\alpha)B(p)u = -A(p)\hat{\varphi}.$$

В качестве дополнительной цели управления сформулируем задачу синтеза наблюдателя функции φ, обеспечивающего малую невязку $\tilde{\varphi}$, для которой цель управления вида (5) будет выполнена. Другими словами требуется обеспечить условие

(13) $$|\tilde{\varphi}| \le \bar{\varepsilon} \quad \text{для некоторого } t \ge t_1,$$

где число $\bar{\varepsilon}$ рассчитывается таким образом, чтобы решения уравнения (10) стремились в сколь угодно малую область ε.

Временно предполагая, что функция φ известна, выберем следующий алгоритм оценки

(14) $$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \gamma\bar{\sigma}\xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = \gamma\bar{\sigma}\xi_3, \\ \dots \\ \dot{\xi}_\rho = \gamma\bar{\sigma}(-k_1\xi_1 - k_2\xi_2 - \dots - k_\rho\xi_\rho + k_1\varphi), \end{cases}$$

(15) $$\hat{\varphi} = \xi_1,$$

или в векторно-матричной форме

(16) $$\dot{\xi} = \gamma\bar{\sigma}(\Gamma\xi + dk_1\varphi),$$

(17) $$\hat{\varphi} = h^T\xi,$$

где $\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & \dots & -k_\rho \end{bmatrix}$, $d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ и $h = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$; число $\rho = n - m$; постоянная $\gamma > 0$; коэффициенты k_i рассчитываются из соображений гурвицевости матрицы Γ; строго положительная функция $\bar{\sigma} > \bar{\sigma}_0 > 0$ является функцией одинаковой скорости роста для $\dot{\varphi}^2$, т.е. существуют положительные числа C_0 и C_1 такие что

$$0 \le C_0 \le \frac{\dot{\varphi}^2}{\bar{\sigma}} \le C_1 < \infty,$$

где $\bar{\sigma}_0$ - любое положительное число. Поскольку для реализации закона управления (12) потребуется взять $\rho - 1$ производную от функции $\hat{\varphi} = \xi_1$ и, как следствие $\rho - 2$ производные от $\bar{\sigma}$, что, в свою очередь, следует из системы (14), то все $\rho - 2$ производные $\bar{\sigma}$ должны быть известны или рассчитаны.

Теорема. Пусть функция $\bar{\sigma}$ выбрана таким образом, что следующее условие выполнено

$$0 \le C_0 \le \frac{\dot{\varphi}^2}{\bar{\sigma}} \le C_1 < \infty. \tag{18}$$

Тогда в алгоритме оценки (14), (15) можно подобрать число $\gamma > 0$, обеспечивающее для известной верхней границы $\overline{C_1}$ коэффициента C_1, выполнение условия (13) для любого заданного числа $\bar{\varepsilon} > 0$.

Доказательство *теоремы* приведено в приложении 1.

Теперь построим реализуемую схему алгоритма оценки (14), (15). Из уравнения (10) находим

$$\varphi = \dot{y} + \alpha\, y - \overline{u}\ .$$

Подставляя последнее уравнение в выражение (14), получаем

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \gamma\overline{\sigma}\xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = \gamma\overline{\sigma}\xi_3, \\ \ldots \\ \dot{\xi}_\rho = \gamma\overline{\sigma}(-k_1\xi_1 - k_2\xi_2 - \ldots - k_\rho\xi_\rho + k_1(\dot{y} + \alpha y - \overline{u})), \end{cases}$$

учитывая, что

$$\overline{u} = -\hat{\varphi} = -\xi_1,$$

получаем

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \gamma\overline{\sigma}\xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = \gamma\overline{\sigma}\xi_3, \\ \ldots \\ \dot{\xi}_\rho = \gamma\overline{\sigma}(-k_2\xi_2 - \ldots - k_\rho\xi_\rho + k_1(\dot{y} + \alpha y)). \end{cases} \tag{19}$$

Введем в рассмотрение новую переменную [7]

$$\varsigma = \xi_\rho - \gamma\overline{\sigma}k_1 y\,. \tag{20}$$

Тогда дифференцируя (20) для системы уравнений (19), получаем

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \gamma\overline{\sigma}\xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = \gamma\overline{\sigma}\xi_3, \\ \ldots \\ \dot{\varsigma} = \gamma\overline{\sigma}(-k_2\xi_2 - \ldots - k_\rho\xi_\rho + k_1\alpha y) - \gamma\dot{\overline{\sigma}}k_1 y, \end{cases} \tag{21}$$

$$\xi_\rho = \varsigma + \gamma\overline{\sigma}k_1 y\,. \tag{22}$$

Система (21), (22) содержит переменные, которые могут быть измерены или рассчитаны, а следовательно алгоритм оценки (21), (22) приемлем для формирования закона управления (12).

Замечание 1. Следует отметить, что в качестве $\overline{\sigma}$ можно использовать функцию

$$\overline{\sigma} = D^2\dot{\varpi}^T\dot{\varpi} + \overline{\sigma}_0\,, \tag{23}$$

которая удовлетворяет условию (18) и, в тоже время, в законе управления (12) будут использоваться только измеряемые производные от ϖ вплоть до $\rho-1$, что в свою очередь, позволяет выбирать $\bar{\sigma}$ указанным способом.

Доказательство. Пренебрегая экспоненциально затухающим слагаемым $\bar{\delta}$, из уравнения (9) получаем

$$\dot{\varphi} = \dot{\varpi}^T \theta = \theta^T \dot{\varpi},$$

откуда

$$\dot{\varphi}^2 = \theta^T \dot{\varpi}\dot{\varpi}^T \theta \le \theta^T \theta \dot{\varpi}^T \dot{\varpi}. \tag{24}$$

Учитывая, неравенство (4) для выражения (24) имеем

$$\dot{\varphi}^2 \le \theta^T \theta \dot{\varpi}^T \dot{\varpi} \le D^2 \dot{\varpi}^T \dot{\varpi}.$$

Очевидно, что при таком расчете функции $\bar{\sigma}$, в неравенстве (18) верхняя граница $\overline{C}_1$ параметра C_1 может быть принята равной единице при любых $\bar{\sigma}_0 > 0$.

Что же касается доказательства возможности расчета $\rho-2$ производной включительно от функции $\bar{\sigma}$, то оно базируется на определенности всех производных вектора $\varpi = W(p)\omega$ до $\rho-1$ включительно, в силу выбора передаточной функции $W(p)$ относительная степень, которой равна именно $\rho-1$.

Замечание 2. Отметим, что реализация функции $\bar{\sigma}$, с использованием алгоритма (23) приведенного в *замечании 1* для некоторых задач может оказаться громоздким, т.к. предполагает формирование вектора $\dot{\varpi}$, каждая компонента которого находится из соотношения $\dot{\varpi}_i = pW(p)\omega_i$. В случае, когда передаточная функция приводима к виду

$$W(p) = \frac{B(p)(p+\alpha)}{A(p)} = \frac{b_0(p+\alpha)}{p(p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2} + a_{n-3}p^{n-3} + \ldots + a_0)} = \tag{25}$$

$$= \frac{b_0(p+\alpha)}{p(p+p_1)(p+p_2)...(p+p_{n-1})},$$

где число $\alpha \geq p_1$ и $-p_1$, $-p_2$, …, $-p_{n-1}$ - корни полинома $A(p)$, для которых выполнено условие

(26) $\operatorname{Im} p_i = 0$, для всех $i = \overline{1, n-1}$,

то во избежание громоздких процедур расчета функции $\overline{\sigma}$, целесообразно использовать алгоритм вида

(27) $\overline{\sigma} = D^2(pW(p)[\omega^T\omega + q])^2 + \overline{\sigma}_0$,

где число q определяет порядок вектора ω (см. раздел 2).

Доказательство *замечания 2* приведено в приложении 2.

4. Пример

Для иллюстрации работоспособности предложенной в работе схемы управления, рассмотрим числовой пример. Пусть модель (1), (2) имеет вид:

(28) $\dot{x}_1 = x_2$,

(29) $\dot{x}_2 = x_3$,

(30) $\dot{x}_3 = -x_2 - 2x_3 + 3\sin 4t + y^2 + u$,

(31) $y = x_1$,

где вектор неопределенных параметров $\theta = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, функция возбуждения (регрессор) $\omega = \begin{bmatrix} \sin 4t \\ y^2 \end{bmatrix}$, u - искомое управление.

Для объекта (28)-(31) рассмотрим математическую модель “вход-выход” вида (3)

(32) $y(t) = \frac{B(p)}{A(p)}\left[\omega^T\theta + u\right] = \frac{1}{p(p+1)^2}\left[3\sin 4t + y^2 + u\right]$,

где $B(p)=1$, $A(p)=p(p+1)^2$ и относительная степень $\rho=n-m=3$.

Выберем передаточную функцию $W(p)=\dfrac{p+1}{p(p+1)^2}$ (где число $\alpha=1$), тогда выражение (32) в соответствии с результатами раздела 3, примет вид (см. уравнение (10))

$$\dot{y}=-y+\varphi+\bar{u}\,,$$

где функция $\varphi=\bar{\delta}+W(p)[3\sin 4t+y^2]$.

Выбирая переменную $\bar{u}$ как

$$\bar{u}=-\hat{\varphi}\,,$$

в силу выражения (12), получаем закон управления

$$u=-p(p+1)\hat{\varphi}=-\dot{\hat{\varphi}}-\ddot{\hat{\varphi}}\,.$$

Для реализации оценки $\hat{\varphi}$, воспользуемся алгоритмом (21), (22):

(33) $$\begin{cases}\dot{\xi}_1=\gamma\bar{\sigma}\xi_2,\\ \dot{\xi}_2=\gamma\bar{\sigma}\xi_3,\\ \dot{\varsigma}=\gamma\bar{\sigma}(-3\xi_2-3\xi_3+y)-\gamma\dot{\bar{\sigma}}y,\end{cases}$$

(34) $$\xi_3=\varsigma+\gamma\bar{\sigma}y\,,$$

(35) $$\hat{\varphi}=\xi_1,$$

где коэффициенты k_i системы (21) рассчитаны как: $k_3=3$, $k_2=3$, $k_1=1$ и в силу *замечания 2* функция $\bar{\sigma}$ выбрана следующим образом

$$\bar{\sigma}=D^2(pW(p)[\omega^T\omega+q])^2+\bar{\sigma}_0=15\left(\frac{p(p+1)}{p(p+1)^2}[(\sin 4t)^2+y^4+2]\right)+1\,.$$

Запишем закон управления в обозначениях алгоритма оценки (33)-(35) и проведем компьютерное моделирование

(36) $$u=-(\dot{\hat{\varphi}}+\ddot{\hat{\varphi}})=-(\dot{\xi}_1+\ddot{\xi}_1)=-(\gamma\bar{\sigma}\xi_2+\gamma\dot{\bar{\sigma}}\xi_2+\gamma\bar{\sigma}\dot{\xi}_2)=$$

$$=-(\gamma\bar{\sigma}\xi_2+\gamma\dot{\bar{\sigma}}\xi_2+(\gamma\bar{\sigma})^2\xi_3)\,.$$

Результаты моделирования для нулевых начальных условий и различных значений параметра γ представлены на рис. 1 и рис. 2. Временные диаграммы иллюстрируют ограниченность сигнала управления $u(t)$, а также демонстрируют уменьшение значения регулируемой переменной $y(t)$ с ростом параметра γ.

5. Заключение

В работе представлена схема робастного управления объектом вида (1)-(3) по измерениям регулируемой переменной $y(t)$, но не ее производным. В сравнении с результатами, представленными в [1-3], в статье предлагаются схемы управления позволяющие получать менее сложные в реализации и громоздкие по размерности алгоритмы. В частности, для объектов управления, передаточная функция которых приводима к виду (25), размерность представленного регулятора составляет $r = n + \rho$, что в свою очередь, значительно превосходит размерность регуляторов построенных с использованием алгоритмов адаптации высокого порядка [1] (размерность регулятора $r = q + q(\rho - 2) + qn$) и его робастной [2] и робастной нелинейной [3] модификаций (размерность для робастной модификации $r = q + \rho - 2 + qn$, для робастной нелинейной модификации $r = \rho - 2 + qn$).

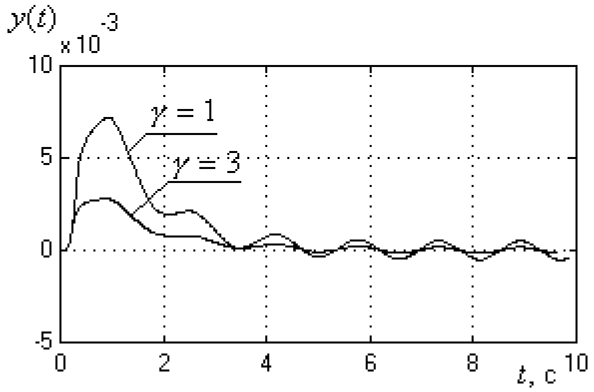

Рис. 1. Переходные процессы в системе (28)-(31): временные диаграммы регулируемой переменной $y(t)$.

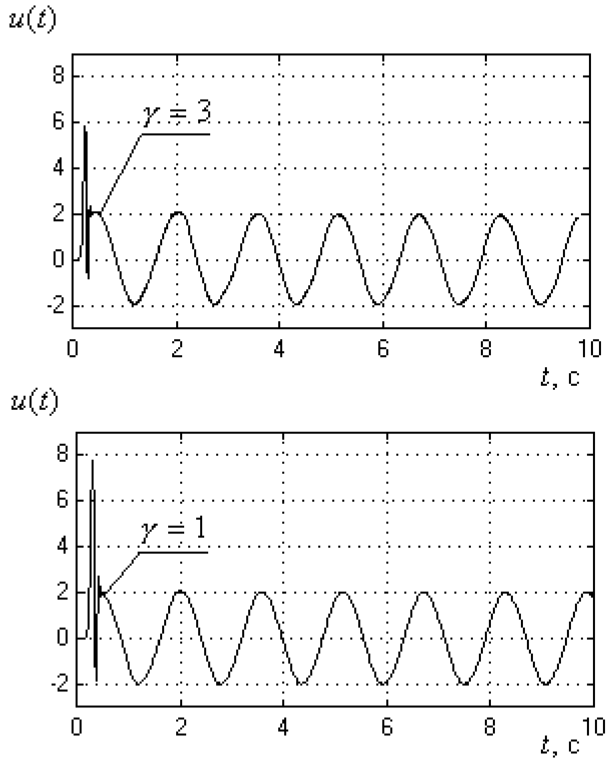

Рис. 2. Переходные процессы в системе (28)-(31): временные диаграммы сигнала управления $u(t)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Доказательство теоремы. Рассмотрим алгоритм оценки функции φ в векторно-матричной форме (16), (17). Введем в рассмотрение вектор отклонений $\eta = h\varphi - \xi$, тогда для его производной получим

(П1.1) $$\dot{\eta} = h\dot{\varphi} - \gamma\overline{\sigma}(\Gamma(h\varphi - \eta) + dk_1\varphi) = h\dot{\varphi} + \gamma\overline{\sigma}\Gamma\eta - \gamma\,\overline{\sigma}(dk_1 + \Gamma h)\varphi .$$

Так как $dk_1 = -\Gamma h$ (проверяется подстановкой), то

$$\dot{\eta} = h\dot{\varphi} + \gamma\overline{\sigma}\Gamma\eta ,$$

где Γ - гурвицева в силу расчета коэффициентов k_i.

Для доказательства сходимости η в любую заданную область, рассмотрим функцию Ляпунова вида

(П1.2) $$V = \eta^T P\eta \le \lambda_{\max}(P)|\eta|^2 ,$$

где $\lambda_{\max}(P)$ - максимальное число известной матрицы $P = P^T > 0$, такой что

(П1.3) $$\Gamma^T P + P\Gamma \le -\lambda P < 0 .$$

Дифференцируя (П1.2), получаем

(П1.4) $$\dot{V} = \gamma\overline{\sigma}\eta^T(\Gamma^T P + P\Gamma)\eta + 2\eta^T Ph\dot{\varphi} \le -\lambda\gamma\overline{\sigma}\eta^T P\eta + 2\eta^T Ph\dot{\varphi} .$$

Используя, следующее, легко проверяемое соотношение для любых числа $\mu > 0$ и функции $\overline{\sigma} > 0$

$$2\eta^T Ph\dot{\varphi} \le \mu\overline{\sigma}(\eta^T Ph)^2 + (\mu\overline{\sigma})^{-1}\dot{\varphi}^2 ,$$

получаем

$$\dot{V} = \le -\lambda\gamma\overline{\sigma}\eta^T P\eta + \mu\overline{\sigma}(\eta^T Ph)^2 + (\mu\overline{\sigma})^{-1}\dot{\varphi}^2 .$$

Выберем число μ такое что

(П1.5) $$-\overline{\lambda}\gamma\overline{\sigma}_0\eta^T P\eta \le -\lambda\gamma\overline{\sigma}\eta^T P\eta + \mu\overline{\sigma}\eta^T Phh^T P\eta ,$$

где число $\overline{\lambda} > 0$.

Тогда выражение (П1.4) примет вид

(П1.6) $$\dot{V} \le -\bar{\lambda}\gamma\bar{\sigma}_0\eta^T P\eta + \mu^{-1}\bar{\sigma}^{-1}\dot{\varphi}^2 .$$

Учитывая неравенство (18) для (П1.6) получаем

(П1.7) $$\dot{V} \le -\bar{\lambda}\gamma\bar{\sigma}_0 V + \frac{C_1}{\mu} \le -\bar{\lambda}\gamma\bar{\sigma}_0 V + \frac{\overline{C}_1}{\mu},$$

откуда

$$V(t) \le e^{-(\bar{\lambda}\gamma\bar{\sigma}_0)t}V(0) + e^{-(\bar{\lambda}\gamma\bar{\sigma}_0)t}\int_0^t e^{(\bar{\lambda}\gamma\bar{\sigma}_0)\tau}d\tau\,\frac{\overline{C}_1}{\mu}$$

и, следовательно,

(П1.8) $$V(t) \le e^{-(\bar{\lambda}\gamma\bar{\sigma}_0)t}V(0) + \frac{1-e^{-(\bar{\lambda}\gamma\bar{\sigma}_0)t}}{\bar{\lambda}\gamma\bar{\sigma}_0}\frac{\overline{C}_1}{\mu}.$$

Поскольку числа $\bar{\lambda}$, $\bar{\sigma}_0$, $\overline{C}_1$ и μ известны, то выбором коэффициента γ, для некоторого $t \ge t_1$ можно обеспечить сходимость траекторий функции $V(t)$ в любую заданную область $\bar{\varepsilon}_1$. Так как $V \le \lambda_{\max}(P)|\eta|^2$ и число $\lambda_{\max}(P)$ известно (в силу определенности матрицы P), то для вектора $\eta = h\varphi - \xi$ можно получить следующую оценку

(П1.9) $|\eta| \le \bar{\varepsilon}_2$ для некоторого $t \ge t_1$.

В силу структуры матрицы h, получаем:

$$h^T\eta = \varphi - h^T\xi = \varphi - \hat{\varphi} = \tilde{\varphi},$$

откуда, в силу известной оценки (П1.9), можно выбрать параметр γ, обеспечивающий выполнение условия (13), что и требовалось доказать.

Доказательство замечания 2. Доказательство будем проводить в два этапа.

Этап 1. Сначала докажем, что при условии вещественности корней полинома $A(p) = p(p + p_1)(p + p_2)...(p + p_{n-1})$, следующее соотношение выполнено

(П2.1) $\quad pW(p)z \le pW(p)[z^2 + 1]$,

где z - любая функция.

Рассмотрим соотношение

(П2.2) $\quad w = pW(p)[z^2 + 1] - pW(p)z = pW(p)[z^2 - z + 1] = pW(p)v$,

где функция $v \ge 0$.

Покажем, что для передаточной функции вида (25), при нулевых начальных значения и условии (26) сигнал $w \ge 0$. Для этого представим выражение (П2.2) следующим образом (см. также рис. 3)

$$w_1 = \frac{1}{p + p_1} w_2, \quad w = b_0(\alpha - p_1)w_1 + b_0 w_2,$$

$$w_2 = \frac{1}{p + p_2} w_3,$$

$$w_3 = \frac{1}{p + p_3} w_4,$$

$$\vdots$$

$$w_{n-1} = \frac{1}{p + p_{n-1}} w_n,$$

$$w_n = \frac{p}{p} v.$$

Откуда получаем систему из n дифференциальных уравнений первого порядка

$$
\begin{aligned}
&\dot{w}_1 = -p_1 w_1 + w_2, \; w = b_0(\alpha - p_1) w_1 + b_0 w_2, \\
&\dot{w}_2 = -p_2 w_2 + w_3, \\
&\qquad \vdots \\
&\dot{w}_{n-1} = -p_{n-1} w_{n-1} + w_n, \\
&\dot{w}_n = \dot{v}.
\end{aligned}
$$

Интегрируя последнее уравнение при нулевых начальных условиях, получаем

$$w_n = v,$$

откуда следует, что $w_n \geq 0$ при $v \geq 0$. Теперь, интегрируя предпоследнее уравнение при нулевых начальных условиях, получаем

$$w_{n-1}(t) = e^{-p_{n-1}t} \int_0^t e^{p_{n-1}\tau} w_n d\tau . \qquad (П2.3)$$

Поскольку, в силу условия (26) $\operatorname{Im} p_{n-1} = 0$, то для функции $v \geq 0$ подынтегральное выражение уравнения (П2.3) неотрицательно, как и слагаемое $e^{-p_{n-1}t}$. Последнее заключение позволяет сделать вывод о том, что из $w_n \geq 0$ следует $w_{n-1} \geq 0$. Аналогичным образом, можно показать, что $w_{n-2} \geq 0$, …, $w_2 \geq 0$ и $w_1 \geq 0$. Далее учитывая, что

$$w = b_0(\alpha - p_1) w_1 + b_0 w_2$$

и, в силу условия $\alpha \geq p_1$, получаем $w \geq 0$. Откуда следует выполнение неравенства (П2.1).

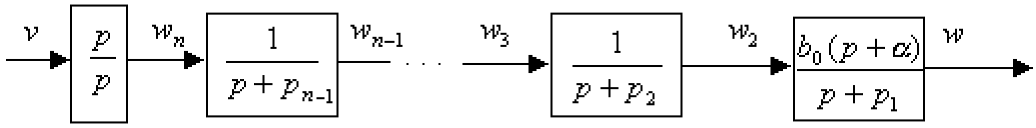

Рис. 3. Представление выражения (П2.2) в виде последовательности элементарных звеньев.

Этап 2. Теперь на базе свойства (П2.1), доказанного на этапе 1, покажем, что использование функции $\bar{\sigma}$ вида (27) обеспечивает выполнение условия (18). Покажем, что функция $\bar{\sigma}$, рассчитанная с использованием алгоритма вида (27) будет не меньше, чем с помощью алгоритма (23), представленного в *замечании 1*. Для этого покажем, что

(П2.4) $\qquad \bar{\sigma}_1 \geq \bar{\sigma}_2,$

где $\bar{\sigma}_1 = D^2(pW(p)[\omega^T\omega + q])^2 + \bar{\sigma}_0$ - рассчитана с использованием алгоритма (27) и $\bar{\sigma}_2 = D^2\dot{\varpi}^T\dot{\varpi} + \bar{\sigma}_0$ - рассчитана с использованием алгоритма (23).

Очевидно, что неравенство (П2.4) будет выполнено, если $(pW(p)[\omega^T\omega + q])^2 \geq \dot{\varpi}^T\dot{\varpi} = (pW(p)\omega)^T(pW(p)\omega)$. Для упрощения математических выкладок будем рассматривать случай, когда вектор ω содержит две компоненты, т.е. $\omega = \begin{bmatrix}\omega_1 \\ \omega_2\end{bmatrix}$ (для случая $q > 2$ можно будет провести доказательство по аналогии). Тогда

(П2.5)
$$(pW(p)[\omega^T\omega + q])^2 = (pW(p)[\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2])^2 =$$
$$= (pW(p)[\omega_1^2 + 1] + pW(p)[\omega_2^2 + 1])^2 =$$
$$= (pW(p)[\omega_1^2 + 1])^2 + 2(pW(p)[\omega_1^2 + 1])(pW(p)[\omega_2^2 + 1]) +$$
$$+ (pW(p)[\omega_2^2 + 1])^2,$$

(П2.6)
$$\dot{\varpi}^T\dot{\varpi} = (pW(p)\omega)^T(pW(p)\omega) =$$
$$= [pW(p)\omega_1 \quad pW(p)\omega_2]\begin{bmatrix}pW(p)\omega_1 \\ pW(p)\omega_2\end{bmatrix} =$$
$$= (pW(p)\omega_1)^2 + (pW(p)\omega_2)^2,$$

где вектор $\dot{\varpi} = pW(p)\omega = \begin{bmatrix}pW(p)\omega_1 \\ pW(p)\omega_2\end{bmatrix}$ и число $q = 2$.

В силу доказанного на этапе 1 свойства, что для

$$w = W(p)v$$

при $v \geq 0$ функция $w \geq 0$, то для уравнения (П2.5) получаем

(П2.7) $$(pW(p)[(\omega^T \omega) + q])^2 \geq (pW(p)[\omega_1^2 + 1])^2 + (pW(p)[\omega_2^2 + 1])^2,$$

где слагаемое $2(pW(p)[\omega_1^2 + 1])(pW(p)[\omega_2^2 + 1]) \geq 0$ в силу неотрицательности $\omega_1^2 + 1$ и $\omega_2^2 + 1$.

Теперь, используя неравенство (П2.1) показываем, что

(П2.8) $$(pW(p)[\omega_1^2 + 1])^2 \geq (pW(p)\omega_1)^2$$

и

(П2.9) $$(pW(p)[\omega_2^2 + 1])^2 \geq (pW(p)\omega_2)^2.$$

Из неравенств (П2.8) и (П2.9) делаем вывод, что соотношение $(pW(p)[(\omega^T \omega) + q])^2 \geq (pW(p)\omega)^T (pW(p)\omega)$ выполнено, а это означает доказательство условия (П2.4), которое гарантирует возможность использования алгоритма (27) для расчета функции $\overline{\sigma}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Morse A.S.* High-order parameter tuners for adaptive control of nonlinear systems // Systems, Models and Feedback: Theory and Applications / Eds A. Isidori, T.J. Tarn. Birkhauser, 1992.
2. *Nikiforov V.O.* Robust high-order tuner of simplified structure // Automatica. 1999. V. 35, No 8. P. 1409–1415.
3. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
4. *Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Схемы адаптивного управления с расширенной ошибкой. Обзор // Автоматика и телемеханика. 1994. №9.
5. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления: Учеб. пособ. – М.: Наука, 1986.
6. *Воронов К.В., Королева О.И., Никифоров В.О.* Робастное управление нелинейными объектами с функциональными неопределенностями Автоматика и телемеханика. 2001. №2.
7. *Бобцов А.А., Мирошник И.В.* Динамический алгоритм адаптации нестационарных систем. // Автоматика и телемеханика. 1999. №12.