ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА В ОЦЕНКАХ РАЗМЕРНОСТИ АТТРАКТОРОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Г.А.Леонов
Dept. of Mathematics and Mechanics
St.Petersburg State University
2, Bibliotechnaya pl., Peterhof
St.Petersburg 198504, Russia
leonov@math.spbu.ru

Статья является текстом доклада, прочитанного автором на Рохлинском мемориале в августе 1999 года. В ней содержится обзор результатов по оценках размерности аттракторов с помощью функций Ляпунова.

На этом пути оказалось возможным получить очень простые формулы для вычсления ляпуновской размерности аттракторов Хенона и Лоренца.

Рассмотрим отображение Хенона $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} z &\to a + by - z^2, \\ y &\to z, \end{aligned}$$

где $a > 0$, $b \in (0, 1)$. Будем рассматривать здесь ляпуновскую размерность $\dim_L K$ инвариантного множества K: $FK = K$, содержащего стационарные точки

$$z_\pm = \frac{1}{2}\left[b - 1 \pm \sqrt{(b-1)^2 + 4a}\right].$$

Теорема 1. *Для отображения F справедливо равенство*

$$\dim_L K = 1 + \frac{1}{1 - \ln b / \ln \alpha(z_-)},$$

где $\alpha(z_-) = \sqrt{z_-^2 + b} - z_-$.

Рассмотрим систему Лоренца

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy, \end{aligned} \tag{1}$$

где r, b, σ — положительные числа. Предположим, что

$$\begin{aligned} &b \geq 2, \qquad \sigma + 1 \geq b, \\ &r\sigma^2(4 - b) + 2\sigma(b-1)(2\sigma - 3b) > b(b-1)^2 \end{aligned}$$

и обозначим через K инвариантное множество системы (1), содержащее точку $x = y = z = 0$.

Теорема 2. *Имеет место равенство*

$$\dim_L K = 3 - \frac{2(\sigma + b + 1)}{\sigma + 1 + \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4r\sigma}}.$$