О СТАБИЛИЗАЦИОННОЙ ПРОБЛЕМЕ БРОКЕТТА

Г.А.Леонов

Dept. of Mathematics and Mechanics
St.Petersburg State University
2, Bibliotechnaya pl., Peterhof
St.Petersburg 198504, Russia
leonov@math.spbu.ru

Аннотация:

В книге "Open problems in mathematical systems and control theory" (Springer 1999) Р.Брокетт поставил следующую проблему.

Дана тройка матриц A, B, C. При каких условиях существует зависимая от времени матрица $K(t)$ такая, что система

$$\frac{dx}{dt} = Ax + BK(t)Cx, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

асимптотически устойчива?

В ряде случаев ответ на этот вопрос дают следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть существуют матрицы K_1 и K_2 такие, что выполнены следующие условия:*

1) *матрица BK_1C имеет $n-1$ собственное значение с отрицательными вещественными частями и* $\det BK_1C = 0$,

2) *для вектора $u \neq 0$, удовлетворяющего равенству $BK_1Cu = 0$, и для некоторого числа λ вектор-функция*

$$\exp\left[(A + BK_2C + \lambda I)t\right]u$$

периодична.

Тогда существует периодическая матрица $K(t)$ такая, что система (1) *асимптотически устойчива.*

Теорема 2. *Пусть $n = 2$ и существуют матрицы K_1 и K_2 такие, что выполнены следующие условия*

1) $\det BK_1C = 0$, $\operatorname{Tr} BK_1C \neq 0$,

2) *матрица $A + BK_2C$ имеет комплексные значения.*

Тогда существует периодическая функция $K(t)$ такая, что система (1) *асимптотически устойчива.*

Следствие. Пусть $n = 2$, B и C — векторы, $K(t)$ — функция: $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, передаточная функция имеет вид

$$W(p) = C(A - pI)^{-1}B = \frac{p + \gamma}{p^2 + \alpha p + \beta},$$

где $\gamma \leq 0$, $\alpha\gamma > \beta$.

Если

$$\gamma^2 - \alpha\gamma + \beta > 0$$

то существует периодическая функция $K(t)$ такая, что система (1) асимптотически устойчива.

Если

$$\gamma^2 - \alpha\gamma + \beta < 0$$

то не существует функций $K(t)$ таких, что система (1) асимптотически устойчива.

Теорема 3. *Пусть $n = 3$, B и C — векторы, $K(t)$ — функция: $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $CB \neq 0$ и существуют числа K_1, K_2 такие, что выполнены следующие условия:*

1) *матрица $A + K_1 BC$ имеет комплексные собственные значения и одно отрицательное собственное значение,*

2) *функция*

$$C \exp[(A + K_2 BC)t]B$$

имеет по крайней мере один нуль на интервале $(-\infty, 0)$.

Тогда существует периодическая функция $K(t)$ такая, что система (1) асимптотически устойчива.